

**Avaliação da Precisão de um Modelo de Dano Contínuo
através de um Modelo Multi-escala baseado em
Homogeneização Computacional**

Bernardo Proença Ferreira

Orientador:

Professor Doutor Francisco Andrade Pires

Co-orientador:

Mestre Igor André Rodrigues Lopes

Dissertação realizada no âmbito do
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Porto, Junho 2017

Página intencionalmente deixada em branco

*Dedicada aos meus pais,
Dídia e João,
e à minha melhor amiga,
Sofia*

Página intencionalmente deixada em branco

Resumo

Avaliação da Precisão de um Modelo de Dano Contínuo através de um Modelo Multi-escala baseado em Homogeneização Computacional

Palavras-chave: Modelo Multi-escala, Fratura Dúctil, Crescimento de Vazios, Triaxialidade de Tensões

Ao longo das últimas décadas, o desenvolvimento de novos materiais e a capacidade de previsão do seu comportamento foram significativamente impulsionados pela utilização de ferramentas computacionais. Entre as mais recentes e promissoras destaca-se a modelação multi-escala, a qual tem despertado um interesse crescente da comunidade científica.

O objetivo principal da presente dissertação consiste na aplicação de um modelo multi-escala baseado em homogeneização computacional para avaliar a precisão do modelo de Gurson na previsão da evolução de dano associada à fratura dúctil de ligas metálicas.

Ambos os modelos são sistematicamente comparados em diferentes regimes de triaxialidade com base num conjunto de análises tridimensionais de diversos provetes sujeitos a solicitações monotónicas de tração e corte. Para que tal comparação seja consistente, é modelado um elemento de volume representativo em conformidade com as hipóteses assumidas na formulação do modelo de Gurson. No regime de alta triaxialidade verificam-se diferenças apreciáveis na evolução da variável de dano, as quais são justificadas através da capacidade de análise da microestrutura ao longo do histórico de deformação. Conclui-se que a precisão do modelo de Gurson pode ser melhorada através da incorporação no modelo, mediante variáveis internas apropriadas, da anisotropia resultante da evolução geométrica dos vazios. No regime de baixa triaxialidade, a incapacidade do modelo de Gurson em caracterizar o estado de dano do material é evidenciada, verificando-se que os vazios sofrem uma distorção de corte acentuada ao longo do histórico de deformação. Conclui-se que as hipóteses e lei assumidas no modelo de Gurson para descrever a evolução da porosidade são pouco apropriadas e que a variável de dano do modelo deve conter uma medida da distorção de corte dos vazios para melhorar a sua precisão neste regime. É ainda realizado um estudo complementar para averiguar a hipótese de representatividade de uma única população de vazios, implicitamente assumida pelo modelo de Gurson. Mantendo o mesmo valor de porosidade inicial, é modelado um novo elemento de volume representativo com duas populações de vazios esféricos. Por comparação com a resposta do elemento de volume representativo com um único vazio central, não se verifica uma influência expressiva da porosidade secundária na evolução de dano durante a fase de crescimento dos vazios.

As análises realizadas na presente dissertação permitem evidenciar as potencialidades desencadeadas por um modelo multi-escala. Tal ferramenta computacional irá certamente contribuir para superar os desafios cada vez mais complexos ao nível do desenvolvimento e capacidade de previsão do comportamento de novos materiais.

Página intencionalmente deixada em branco

Abstract

On the Predictive Ability of a Continuum Damage Model through an Homogenization based Multi-scale Model

Keywords: Multi-scale Model, Ductile Fracture, Void Growth, Stress Triaxiality

Over the last decades, the development of new materials and the ability to correctly predict their behaviour were significantly propelled by the use of computational tools. Nowadays, multi-scale modeling is unquestionably among the most recent and promising tools and has been the subject of increasing interest by the scientific community.

The aim of this work is the use of an homogenization based multi-scale model to assess the Gurson's model ability to correctly predict the damage evolution associated with ductile fracture of structural alloys.

Both models are systematically compared under low and high stress triaxiality through a set of three-dimensional analyses on specimens under monotonic traction and shear loadings. To assure the consistency of such comparison, a representative volume element is modeled according to the hypotheses upon which the Gurson's model was derived. In the high stress triaxiality regime, some differences are found in the evolution of damage which are interpreted and justified by the microstructure analysis over the deformation history. It is concluded that the Gurson's model predictive ability can be improved by accounting, through appropriate internal variables, for the anisotropy resultant from void shape evolution. In the low stress triaxiality regime, Gurson's model incapacity to predict the material damage state is clearly shown as the voids suffer a marked shear distortion over the deformation history. It is concluded that the hypotheses and the damage law established to describe the porosity evolution are inappropriate and the model damage variable should contain a measure of the void shear distortion to improve its predictive ability. Besides this main set of analyses, an additional study is led to assess the representativeness of a single void population in describing the material damage state. Considering the same initial porosity as before and assuming some simplified options, a representative volume element with two spherical void populations is modeled. By comparing the behaviour of the representative volume elements with one and two void populations, it is seen that the secondary porosity has a negligible influence on the damage evolution during void growth under low and high stress triaxiality.

The analyses performed in this work also highlight the potential unlocked by a multi-scale model. Such a computational tool will certainly contribute to overcoming the increasingly complex challenges arising from developing and predicting the behaviour of new materials.

Página intencionalmente deixada em branco

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço ao Professor Doutor Francisco Andrade Pires por todo o apoio e motivação ao longo dos últimos três anos. Em particular, pelo reconhecimento do meu esforço, pela dedicação em definir o meu trajeto académico e pelo acompanhamento profissional até ao presente. Tenho não só a sorte de ser orientado por alguém exímio, quer a nível pessoal quer a nível profissional, como também a oportunidade de poder trabalhar na área que me fascina.

Ao Igor, agradeço toda a paciência e disponibilidade para me apoiar e ensinar durante a dissertação. É para mim inquestionável que, sem a partilha de conhecimento e o esforço e tempo dispensado da sua parte, não teria sido possível atingir os ambiciosos objetivos estabelecidos. Aos restantes amigos da equipa, Daniel, Fernando, Miguel e Rodrigo, agradeço também a constante disponibilidade e companheirismo que tornam os dias mais enriquecedores e motivadores.

Não posso deixar de agradecer aos meus grandes amigos Joel, Patrícia e Raquel por toda a amizade e apoio que me ajudaram a ultrapassar os momentos mais desafiantes deste percurso. À Margarida, um agradecimento especial por todo o carinho, paciência e acompanhamento ao longo destes meses que nem sempre foram fáceis.

Gostaria também de agradecer a toda a minha família que esteve ao meu lado durante este percurso e, sem a qual, não teria capacidade de atingir metas tão ambiciosas. Um agradecimento especial à Sofia por me proporcionar diariamente as melhores condições que tornam possível todo o tempo dedicado ao domínio académico. Aos meus pais, Dídia e João, e à minha irmã, Beatriz, agradeço o apoio e incentivo incondicionais e o esforço para me proporcionar a vida que tenho hoje sem que nunca me faltasse nada.

Por último, à minha melhor amiga Sofia, um agradecimento muito especial pela sua amizade tão genuína e que me dá força para superar todos os desafios e momentos menos fáceis.

A todos, o meu sincero obrigado.
Bernardo Ferreira

Página intencionalmente deixada em branco

Conteúdo

Resumo	i
Abstract	iii
Agradecimentos	v
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xix
Notação	xxi
1 Introdução	1
1.1 Contextualização	1
1.2 Objetivos	3
1.3 Estrutura do documento	3
2 Mecânica dos Meios Contínuos	7
2.1 Introdução	7
2.2 Conceitos básicos	7
2.3 Cinemática e medidas de deformação	10
2.3.1 Deformação e movimento de um corpo	10
2.3.2 Descrição material e espacial	12
2.3.3 Gradiente de deformação	13
2.3.4 Tensores de deformação	16
2.4 Forças e medidas de tensão	17
2.4.1 Tensor das tensões de Cauchy	18
2.4.2 Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff	19
2.4.3 Decomposição desviadora/hidrostática	19
2.5 Princípios fundamentais da termodinâmica	20
2.5.1 Princípio da conservação da massa	20
2.5.2 Balanço de momentos	20
2.5.3 Primeira lei da termodinâmica	21
2.5.4 Segunda lei da termodinâmica	21
2.5.5 Desigualdade de Clausius-Duhem	22
2.6 Forma fraca das equações de equilíbrio	22
2.6.1 Princípio dos Trabalhos Virtuais	23

2.7	Problema mecânico de valor de fronteira inicial	24
2.7.1	Modelo constitutivo baseado em variáveis internas	24
2.7.2	Problema mecânico de valor de fronteira inicial	27
2.7.3	Forma fraca do problema mecânico de valor de fronteira inicial	27
3	Método dos Elementos Finitos	31
3.1	Introdução	31
3.2	Discretização temporal	32
3.3	Discretização espacial	34
3.3.1	Funções de interpolação	34
3.3.2	Discretização de espaços, matriz de interpolação e operadores gra- diente discretos	35
3.3.3	Discretização das equações de equilíbrio	37
3.4	Método de Newton-Raphson	41
4	Modelos Multi-Escala baseados em Homogeneização	47
4.1	Introdução	47
4.2	Elemento de Volume Representativo	49
4.3	Modelo multi-escala e teoria de transição de escalas	50
4.3.1	Descrição de um modelo multi-escala	50
4.3.2	Teoria de transição de escalas	52
4.4	Problema de equilíbrio à microescala	52
4.4.1	Imposição do gradiente de deformação macroscópico	53
4.4.2	Campo de deslocamentos microscópico admissível	53
4.4.3	Equações de equilíbrio do EVR	54
4.4.4	Consequências do princípio de Hill-Mandel	55
4.4.5	Definição do problema de equilíbrio à microescala	56
4.5	Homogeneização do tensor das tensões	57
4.5.1	Homogeneização do módulo tangente consistente	57
4.6	Condições de fronteira à microescala	57
4.6.1	Hipótese de Taylor	58
4.6.2	Condição de fronteira linear	59
4.6.3	Condição de fronteira periódica	59
4.6.4	Condição de tração uniforme na fronteira	61
4.7	Aplicação do Método dos Elementos Finitos	62
4.7.1	Discretização temporal	62
4.7.2	Discretização espacial	63
4.7.3	Método de Newton-Raphson	63
4.7.4	Imposição das condições de fronteira	64
5	Programa LINKS e Implementações Computacionais	65
5.1	Introdução	65
5.2	Descrição do programa LINKS	66
5.2.1	Análise à macroescala	66
5.2.2	Análise multi-escala baseada em homogeneização computacional	66
5.3	Implementação computacional 1: pós-processamento	70
5.3.1	Deformação total equivalente acumulada	70
5.3.2	Triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode	70

5.3.3	Porosidade	76
5.3.4	Subrotina GPVARSOUT	76
5.4	Implementação computacional 2: histórico do gradiente de deformação . . .	77
6	Fratura Dúctil Multi-escala	79
6.1	Introdução	79
6.2	Mecanismos de fratura dúctil a várias escalas	80
6.2.1	Enquadramento	80
6.2.2	Mecanismos microscópicos	81
6.2.3	Evidências e mecanismos macroscópicos	91
6.3	Estudos micromecânicos e modelos de fratura dúctil de materiais porosos . .	94
6.3.1	Enquadramento	94
6.3.2	Modelos de fratura de materiais dúcteis porosos	95
6.3.3	Modelo de Gurson	98
7	Análises à Macroescala	105
7.1	Introdução	105
7.2	Caracterização dos provetes	105
7.3	Calibração do material	110
7.3.1	Escolha do material	110
7.3.2	Descrição do procedimento de calibração	110
7.3.3	Simulação numérica	112
7.4	Simulações numéricas	115
7.4.1	Parâmetros de simulação e limitações computacionais	115
7.4.2	Referências experimentais e critério de paragem	119
7.5	Resultados obtidos	119
7.5.1	Provete entalhado (R4)	119
7.5.2	Provete entalhado (R12)	127
7.5.3	Provete não-entalhado	134
7.5.4	Provete de placa com furo	141
7.5.5	Provete borboleta ($\alpha = 10^\circ$)	148
7.5.6	Provete borboleta ($\alpha = 0^\circ$)	155
7.6	Conclusões	162
8	Análises Multi-escala	163
8.1	Introdução	163
8.2	Simulações numéricas	164
8.2.1	Seleção de provetes	164
8.2.2	Parâmetros de simulação	165
8.3	Resultados obtidos	168
8.3.1	Provete entalhado (R4)	168
8.3.2	Provete não-entalhado	179
8.3.3	Provete borboleta ($\alpha = 10^\circ$)	189
8.3.4	Provete borboleta ($\alpha = 0^\circ$)	199
8.4	Influência da porosidade secundária	208
8.4.1	Introdução	208
8.4.2	Parâmetros de simulação	209
8.4.3	Resultados obtidos	212

8.5	Conclusões	227
9	Conclusões Gerais e Perspetivas de Trabalhos Futuros	229
9.1	Conclusões gerais	229
9.2	Perspetivas de trabalhos futuros	230
	Bibliografia	233

Lista de Figuras

2.1	Representação esquemática da hipótese fundamental subjacente à mecânica dos meios contínuos.	8
2.2	Conceito de configuração de um corpo \mathcal{B} num determinado instante t em relação a um referencial cartesiano de base ortonormal \mathbf{e}_i	8
2.3	Configurações e movimento de um corpo contínuo.	9
2.4	Deslocamentos de corpo rígido.	10
2.5	Deformação de um corpo.	11
2.6	Movimento de um corpo.	12
2.7	Representação esquemática do significado físico do gradiente de deformação. .	14
2.8	Representação esquemática da decomposição isocórica/volumétrica do gradiente de deformação.	15
2.9	Representação esquemática do problema mecânico quasi-estático de valor de fronteira inicial.	28
3.1	Representação esquemática das diferentes etapas percorridas na aplicação do Método dos Elementos Finitos a um problema mecânico quasi-estático não-linear de valor de fronteira inicial.	32
3.2	Representação esquemática da aplicação do Método de Newton-Raphson na resolução do problema mecânico incremental quasi-estático discretizado de valor de fronteira inicial.	43
4.1	Esquema representativo de um Elemento de Volume Representativo (EVR). .	50
4.2	Esquema representativo de um modelo multi-escala.	51
4.3	Representação esquemática da Hipótese de Taylor.	58
4.4	Representação esquemática da condição de fronteira linear.	59
4.5	Representação esquemática da condição de fronteira periódica.	60
4.6	Representação esquemática da condição de tração uniforme na fronteira. . . .	61
5.1	Estrutura do programa LINKS para uma análise à macroescala de um problema estrutural pelo Método dos Elementos Finitos.	67
5.2	Estrutura do programa LINKS para uma análise multi-escala de um problema estrutural pelo Método dos Elementos Finitos.	69
5.3	Representação do estado de tensão de um ponto P no espaço tridimensional das tensões principais.	72
5.4	Representação do estado de tensão de um ponto Q no plano desviador (ou plano II).	73

5.5	Representação de alguns estados de tensão iniciais associados a provetes experimentais, utilizados em ensaios de plasticidade e fratura.	74
5.6	Representação das tensões principais adimensionalizadas $3\sigma_i/(2\bar{\sigma})$, $i = 1, 2, 3$, em função do parâmetro do ângulo de Lode para $T = 0$	75
6.1	Mecanismos de fratura dúctil de metais e ligas metálicas monofásicas em regime de comportamento elasto-plástico.	82
6.2	Superfície de fratura dúctil típica, caracterizada por uma topologia porosa (retirada de AbdelAl (2009)).	82
6.3	Mecanismos de nucleação observados num alumínio 6061 reforçado com partículas de óxido de alumínio (Al_2O_3), solicitado na direção horizontal: (a) rotura de partículas de segunda fase ou inclusões (<i>particle cracking</i>); (b) separação de superfícies na interface entre as partículas e inclusões e a matriz do material (<i>particle decohesion</i>) (retiradas de Kanetake et al. (1995)).	83
6.4	Mecanismos de nucleação observados por tomografia de raios-X: (a) rotura de partículas de segunda fase ou inclusões (<i>particle cracking</i>) numa matriz dura (alumínio 2124); (b) separação de superfícies na interface entre as partículas e inclusões e a matriz do material (<i>particle decohesion</i>) numa matriz macia (alumínio puro) (retiradas de Babout et al. (2004b)).	84
6.5	Crescimento de vazios num aço ao carbono hipoeutectóide em que o carregamento é normal ao plano da figura (retirada de Pineau et al. (2016)).	86
6.6	Representação esquemática da distribuição de tração normal na interface partícula-matriz numa solicitação de tração uniaxial ($T = 1/3$) na direção vertical (adaptado de (Benzerga and Leblond, 2010)).	87
6.7	Fenómeno de <i>void locking</i> em condições de baixa triaxialidade: (a) inclusões de MnS em aço ao carbono hipoeutectóide (adaptado de (Benzerga, 2000)); (b) inclusão de Al_2O_3 em aço de alta resistência e baixa liga (<i>High-Strength Low-Alloy Steel</i>) (retirada de Achour et al. (2013)).	87
6.8	Mecanismo de coalescência por estricção interna localizada (<i>internal necking coalescence</i>): (a) sequência de deformação em chapa de liga de alumínio 5052 perfurada a laser e solicitada na direção vertical (retirado de Weck and Wilkinson (2008)); (b) Tomografia de um provete de cobre perfurado a laser e solicitado na direção vertical (retirado de (Weck et al., 2008)); (c) Provelte de aço ferrítico-perlítico solicitado na direção vertical (retirado de Benzerga and Leblond (2010)).	89
6.9	Mecanismo de coalescência por localização em banda de corte (<i>shear void coalescence</i>): (a) sequência de deformação em chapa de liga de alumínio 5052 perfurada a laser e solicitada na direção vertical (retirado de Weck and Wilkinson (2008)); (b) Solicitação na direção vertical (retirado de Benzerga and Leblond (2010)); (c) Solicitação axisimétrica com maior magnitude na direção vertical (retirado de Pineau et al. (2016)).	90
6.10	Mecanismo de coalescência em colunas de vazios (<i>necklace coalescence</i>) em estado plano de deformação. Solicitação na direção vertical (retirada de Benzerga and Leblond (2010)).	90
6.11	Mecanismos de fratura dúctil num provete axissimétrico entalhado solicitado em tração uniaxial (adaptado de Benzerga (2000)).	92
6.12	Mecanismos característicos de propagação da extremidade de uma fenda na fratura de metais dúcteis.	93

7.1	Localização do estado de tensão inicial promovido pelos diversos provetes em termos de triaxialidade e do parâmetro do ângulo de Lode.	106
7.2	Geometria e direção de carregamento do provete axissimétrico com entalhe de raio 4 mm. Dimensões em mm.	107
7.3	Geometria e direção de carregamento do provete axissimétrico com entalhe de raio 12 mm. Dimensões em mm.	107
7.4	Geometria e direção de carregamento do provete axissimétrico não-entalhado. Dimensões em mm.	107
7.5	Geometria e direção de carregamento do provete de placa com furo. Dimensões em mm.	108
7.6	Geometria e direção de carregamento do provete borboleta sob solicitação combinada de tração e corte ($\alpha = 10^\circ$). Dimensões em mm.	108
7.7	Geometria e direção de carregamento do provete borboleta sob solicitação de corte puro ($\alpha = 0^\circ$). Dimensões em mm.	109
7.8	Curva força-deslocamento obtida experimentalmente no ensaio de tração uniaxial do provete axissimétrico não-entalhado (obtida através de digitalização da curva força-deslocamento experimental apresentada por Malcher (2012) e retirada de Bao (2003)).	112
7.9	Modelo tridimensional de um oitavo da geometria (<i>gauge section</i>) do provete axissimétrico não-entalhado, discretizado numa malha de 1125 elementos hexaédricos de vinte nós.	113
7.10	(a) Comparação das curvas força-deslocamento obtidas numericamente e experimentalmente no procedimento de calibração da lei de endurecimento do material com base num ensaio de tração uniaxial de um provete axissimétrico não-entalhado. (b) Lei de endurecimento calibrada da liga de alumínio 2024-T351.	114
7.11	Modelo tridimensional de um oitavo da geometria (<i>gauge section</i>) do provete axissimétrico entalhado (entalhe de raio 4 mm), discretizado numa malha de 351 elementos hexaédricos de vinte nós. É considerado um total de 20 incrementos.	116
7.12	Modelo tridimensional de um oitavo da geometria (<i>gauge section</i>) do provete axissimétrico entalhado (entalhe de raio 12 mm), discretizado numa malha de 351 elementos hexaédricos de vinte nós. É considerado um total de 20 incrementos.	117
7.13	Modelo tridimensional de um oitavo da geometria (<i>gauge section</i>) do provete axissimétrico não-entalhado, discretizado numa malha de 384 elementos hexaédricos de vinte nós. É considerado um total de 30 incrementos.	117
7.14	Modelo tridimensional de um oitavo da geometria do provete de placa com furo, discretizado numa malha de 360 elementos hexaédricos de vinte nós. É considerado um total de 20 incrementos.	118
7.15	Modelo tridimensional de um meio da geometria do provete borboleta sujeito à solicitação combinada de tração e corte e à solicitação de corte puro, discretizado numa malha de 352 elementos hexaédricos de vinte nós. É considerado um total de 20 incrementos.	118
7.16	Configuração de referência (vermelho) e configuração deformada (azul) do provete entalhado (R4) para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.76$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$	120

7.17	Curva força-deslocamento obtida numericamente para o provete entalhado (R4).	121
7.18	Distribuição da porosidade no provete entalhado (R4) para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.76$ mm) e representação das posições aproximadas dos pontos de Gauss para pós-processamento. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.	121
7.19	Distribuição da deformação total equivalente no provete entalhado (R4) para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.76$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.	122
7.20	Análise da evolução das variáveis de interesse nos pontos de Gauss selecionados para o provete entalhado (R4): (a) triaxialidade; (b) parâmetro do ângulo de Lode; (c) porosidade; (d) deformação total equivalente.	126
7.21	Configuração de referência (vermelho) e configuração deformada (azul) do provete entalhado (R12) para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 2.76$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.	127
7.22	Curva força-deslocamento obtida numericamente para o provete entalhado (R12).	128
7.23	Distribuição da porosidade no provete entalhado (R12) para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 2.76$ mm) e representação das posições aproximadas dos pontos de Gauss para pós-processamento. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.	128
7.24	Distribuição da deformação total equivalente no provete entalhado (R12) para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 2.76$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.	129
7.25	Análise da evolução das variáveis de interesse nos pontos de Gauss selecionados para o provete entalhado (R12): (a) triaxialidade; (b) parâmetro do ângulo de Lode; (c) porosidade; (d) deformação total equivalente.	133
7.26	Configuração de referência (vermelho) e configuração deformada (azul) do provete não-entalhado para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 7.80$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.	134
7.27	Curva força-deslocamento obtidas numericamente para o provete não-entalhado.	135
7.28	Distribuição da porosidade no provete não-entalhado para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 7.80$ mm) e representação das posições aproximadas dos pontos de Gauss para pós-processamento. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.	135
7.29	Distribuição da deformação total equivalente no provete não-entalhado para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 7.80$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.	136
7.30	Configuração de referência (vermelho) e configuração deformada (azul) do provete não-entalhado para um deslocamento prescrito ($u \approx 4.0$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.	136
7.31	Análise da evolução das variáveis de interesse nos pontos de Gauss selecionados para o provete não-entalhado: (a) triaxialidade; (b) parâmetro do ângulo de Lode; (c) porosidade; (d) deformação total equivalente.	140
7.32	Configuração de referência (vermelho) e configuração deformada (azul) do provete de placa com furo para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 4.70$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.	141

7.33	Curva força-deslocamento obtida numericamente para o provete de placa com furo.	142
7.34	Distribuição da porosidade no provete de placa com furo para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 4.70$ mm) e representação das posições aproximadas dos pontos de Gauss para pós-processamento. Fator de escala de deformação $\times 1.0$	142
7.35	Distribuição da deformação total equivalente no provete de placa com furo para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 4.70$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$	143
7.36	Análise da evolução das variáveis de interesse nos pontos de Gauss selecionados para o provete de placa com furo: (a) triaxialidade; (b) parâmetro do ângulo de Lode; (c) porosidade; (d) deformação total equivalente.	147
7.37	Configuração de referência (vermelho) e configuração deformada (azul) do provete borboleta em solitação combinada de tração e corte ($\alpha = 10^\circ$) para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.60$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$	148
7.38	Curva força-deslocamento obtida numericamente para o provete borboleta em solitação combinada de tração e corte.	149
7.39	Distribuição da porosidade no provete borboleta em solitação combinada de tração e corte para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.60$ mm) e representação das posições aproximadas dos pontos de Gauss para pós-processamento. Fator de escala de deformação $\times 1.0$	149
7.40	Distribuição da deformação total equivalente no provete borboleta em solitação combinada de tração e corte para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.60$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$	150
7.41	Análise da evolução das variáveis de interesse nos pontos de Gauss selecionados para o provete borboleta em solitação combinada de tração e corte: (a) triaxialidade; (b) parâmetro do ângulo de Lode; (c) porosidade; (d) deformação total equivalente.	154
7.42	Configuração de referência (vermelho) e configuração deformada (azul) do provete borboleta em solitação de corte puro ($\alpha = 0^\circ$) para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.60$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$	155
7.43	Curva força-deslocamento obtida numericamente para o provete borboleta em solitação de corte puro.	156
7.44	Distribuição da porosidade no provete borboleta em solitação de corte puro para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.60$ mm) e representação das posições aproximadas dos pontos de Gauss para pós-processamento. Fator de escala de deformação $\times 1.0$	156
7.45	Distribuição da deformação total equivalente no provete borboleta em solitação de corte puro para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.60$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$	157
7.46	Análise da evolução das variáveis de interesse nos pontos de Gauss selecionados para o provete borboleta em solitação de corte puro: (a) triaxialidade; (b) parâmetro do ângulo de Lode; (c) porosidade; (d) deformação total equivalente.	161
8.1	Geometria do EVR com um vazio esférico concêntrico.	166

8.2	Discretização do EVR com um vazio esférico concêntrico numa malha estruturada de elementos hexaédricos de vinte nós: (a) 1354 elementos; (b) 2080 elementos; (c) 5344 elementos.	167
8.3	Comparação das curvas força-deslocamento obtidas pelo modelo multi-escala e pelo modelo de Gurson para o provete entalhado (R4).	169
8.4	Distribuição da porosidade no provete entalhado (R4) obtida pelo modelo multi-escala para o último incremento considerado representativo ($u = 1.58\text{mm}$) e representação das posições aproximadas dos pontos de Gauss para pós-processamento. Fator de escala de deformação $\times 1.0$	170
8.5	Distribuição da deformação total equivalente no provete entalhado (R4) obtida pelo modelo multi-escala para o último incremento considerado representativo ($u = 1.58\text{ mm}$). Fator de escala de deformação $\times 1.0$	170
8.6	Comparação da evolução das variáveis de interesse entre o modelo multi-escala e o modelo de Gurson nos pontos de Gauss selecionados para o provete entalhado (R4): (a) triaxialidade; (b) parâmetro do ângulo de Lode; (c) porosidade; (d) deformação total equivalente.	173
8.7	Evolução da geometria do vazio e da deformação plástica equivalente no EVR associado ao ponto crítico (GP 1) do provete entalhado (R4). Fator de escala de deformação $\times 1.0$	176
8.8	Geometria dos vazios e distribuição da deformação plástica equivalente nos EVRs associados aos diferentes pontos de Gauss para o último incremento considerado representativo ($u = 1.58\text{ mm}$) no provete entalhado (R4). Fator de escala de deformação $\times 1.0$	177
8.9	Análise multi-escala do provete entalhado (R4) ao longo do histórico de deformação associado a uma solicitação de tração uniaxial. Fator de escala de deformação $\times 1.0$ em ambas as escalas.	178
8.10	Comparação das curvas força-deslocamento obtidas pelo modelo multi-escala e pelo modelo de Gurson para o provete não-entalhado.	179
8.11	Distribuição da porosidade no provete não-entalhado obtida pelo modelo multi-escala para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 7.80\text{ mm}$) e representação das posições aproximadas dos pontos de Gauss para pós-processamento. Fator de escala de deformação $\times 1.0$	180
8.12	Distribuição da deformação total equivalente no provete não-entalhado obtida pelo modelo multi-escala para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 7.80\text{ mm}$). Fator de escala de deformação $\times 1.0$	180
8.13	Comparação da evolução das variáveis de interesse entre o modelo multi-escala e o modelo de Gurson nos pontos de Gauss selecionados para o provete não-entalhado: (a) triaxialidade; (b) parâmetro do ângulo de Lode; (c) porosidade; (d) deformação total equivalente.	183
8.14	Deformação do vazio associado no EVR associado ao ponto crítico (GP 1) do provete não-entalhado para $u = 2.100\text{mm}$. Fator de escala de deformação $\times 1.0$	184
8.15	Evolução da geometria do vazio e da deformação plástica equivalente no EVR associado ao ponto crítico (GP 1) do provete não-entalhado. Fator de escala de deformação $\times 1.0$	186
8.16	Geometria dos vazios e distribuição da deformação plástica equivalente nos EVRs associados aos diferentes pontos de Gauss para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 7.80\text{ mm}$) no provete não-entalhado. Fator de escala de deformação $\times 1.0$	187

8.17	Análise multi-escala do provete não-entalhado ao longo do histórico de deformação associado a uma solicitação de tração uniaxial. Fator de escala de deformação $\times 1.0$ em ambas as escalas.	188
8.18	Comparação das curvas força-deslocamento obtidas pelo modelo multi-escala e pelo modelo de Gurson para o provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte.	189
8.19	Distribuição da porosidade no provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte obtida pelo modelo multi-escala para o último incremento considerado representativo ($u = 1.45 \text{ mm}$) e representação das posições aproximadas dos pontos de Gauss para pós-processamento. Fator de escala de deformação $\times 1.0$	190
8.20	Distribuição da deformação total equivalente no provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte obtida pelo modelo multi-escala para o último incremento considerado representativo ($u = 1.45 \text{ mm}$). Fator de escala de deformação $\times 1.0$	190
8.21	Comparação da evolução das variáveis de interesse entre o modelo multi-escala e o modelo de Gurson nos pontos de Gauss selecionados para o provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte: (a) triaxialidade; (b) parâmetro do ângulo de Lode; (c) porosidade; (d) deformação total equivalente.	193
8.22	Geometria dos vazios e distribuição da deformação plástica equivalente nos EVRs associados aos diferentes pontos de Gauss para o último incremento considerado representativo ($u = 1.45 \text{ mm}$) no provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte. Fator de escala de deformação $\times 1.0$	195
8.23	Evolução da geometria do vazio e da deformação plástica equivalente no EVR associado ao ponto de Gauss GP 1 do provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte. Fator de escala de deformação $\times 1.0$	196
8.24	Evolução da geometria do vazio e da deformação plástica equivalente no EVR associado ao ponto de Gauss GP 5 do provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte. Fator de escala de deformação $\times 1.0$	197
8.25	Análise multi-escala do provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte ao longo do histórico de deformação. Fator de escala de deformação $\times 1.0$ em ambas as escalas.	198
8.26	Comparação das curvas força-deslocamento obtidas pelo modelo multi-escala e pelo modelo de Gurson para o provete borboleta em solicitação de corte puro.	199
8.27	Distribuição da porosidade no provete borboleta em solicitação de corte puro obtida pelo modelo multi-escala para o último incremento considerado representativo ($u = 1.20 \text{ mm}$) e representação das posições aproximadas dos pontos de Gauss para pós-processamento. Fator de escala de deformação $\times 1.0$	200
8.28	Distribuição da deformação total equivalente no provete borboleta em solicitação de corte puro obtida pelo modelo multi-escala para o último incremento considerado representativo ($u = 1.20 \text{ mm}$). Fator de escala de deformação $\times 1.0$	200
8.29	Comparação da evolução das variáveis de interesse entre o modelo multi-escala e o modelo de Gurson nos pontos de Gauss selecionados para o provete borboleta em solicitação de corte puro: (a) triaxialidade; (b) parâmetro do ângulo de Lode; (c) porosidade; (d) deformação total equivalente.	203
8.30	Evolução da geometria do vazio e da deformação plástica equivalente no EVR associado ao ponto de Gauss GP 5 do provete borboleta em solicitação de corte puro. Fator de escala de deformação $\times 1.0$	205

8.31 Geometria dos vazios e distribuição da deformação plástica equivalente nos EVRs associados aos diferentes pontos de Gauss para o último incremento considerado representativo ($u = 1.20\text{mm}$) no provete borboleta em solicitação de corte. Fator de escala de deformação $\times 1.0$	206
8.32 Análise multi-escala do provete borboleta em solicitação de corte puro ao longo do histórico de deformação. Fator de escala de deformação $\times 1.0$ em ambas as escalas.	207
8.33 Geometria do EVR com duas populações de vazios esféricos.	210
8.34 Discretização do EVR com múltiplos vazios numa malha estruturada de elementos hexaédricos de vinte nós: (a) 3776 elementos; (b) 9936 elementos; (c) 15120 elementos.	211
8.35 Deformação total equivalente associada ao histórico do gradiente de deformação obtido através da análise multi-escala do provete entalhado (R4).	213
8.36 Comparação da evolução da (a) porosidade e da (b) triaxialidade entre o EVR com um vazio, o EVR com múltiplos vazios e o modelo de Gurson na análise do provete entalhado (R4).	215
8.37 Evolução do estado de deformação e da distribuição de deformação plástica equivalente no EVR com múltiplos vazios para três instantes do histórico de deformação do provete entalhado (R4). Fator de escala de deformação $\times 1.0$	216
8.38 Deformação total equivalente associada ao histórico do gradiente de deformação obtido através da análise multi-escala do provete não-entalhado.	217
8.39 Comparação da evolução da porosidade entre o EVR com um vazio, o EVR com múltiplos vazios e o modelo de Gurson na análise do provete não-entalhado.	218
8.40 Evolução do estado de deformação e da distribuição de deformação plástica equivalente no EVR com múltiplos vazios para três instantes do histórico de deformação do provete não-entalhado. Fator de escala de deformação $\times 1.0$	219
8.41 Deformação total equivalente associada ao histórico do gradiente de deformação obtido através da análise multi-escala do provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte.	220
8.42 Comparação da evolução da (a) porosidade e da (b) triaxialidade e entre o EVR com um vazio, o EVR com múltiplos vazios e o modelo de Gurson na análise do provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte.	222
8.43 Evolução do estado de deformação e da distribuição de deformação plástica equivalente no EVR com múltiplos vazios para três instantes do histórico de deformação do provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte. Fator de escala de deformação $\times 1.0$	223
8.44 Deformação total equivalente associada ao histórico do gradiente de deformação obtido através da análise multi-escala do provete borboleta em solicitação de corte puro.	224
8.45 Comparação da evolução da porosidade entre o EVR com um vazio, o EVR com múltiplos vazios e o modelo de Gurson na análise do provete borboleta em solicitação de corte puro.	225
8.46 Evolução do estado de deformação e da distribuição de deformação plástica equivalente no EVR com múltiplos vazios para três instantes do histórico de deformação do provete borboleta em solicitação de corte puro. Fator de escala de deformação $\times 1.0$	226

Lista de Tabelas

6.1	Parâmetros que influenciam o mecanismo de nucleação prevalecente e tendências relativas ao aumento de cada parâmetro (Benzerga and Leblond, 2010).	85
7.1	Propriedades da liga de alumínio 2024-T351.	110
7.2	Localização da fratura observada experimentalmente para os diferentes provetes considerados em liga de alumínio 2024-T351 (Bao (2003), Bai (2008)).	120
7.3	Triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode médios para cada ponto de Gauss analisado no provete entalhado (R4).	123
7.4	Porosidade e deformação total equivalente em cada ponto de Gauss analisado no provete entalhado (R4) para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.76$ mm).	124
7.5	Triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode médios para cada ponto de Gauss analisado no provete entalhado (R12).	130
7.6	Porosidade e deformação total equivalente em cada ponto de Gauss analisado no provete entalhado (R12) para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 2.76$ mm).	131
7.7	Triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode médios para cada ponto de Gauss analisado no provete não-entalhado.	137
7.8	Porosidade e deformação total equivalente em cada ponto de Gauss analisado no provete não-entalhado para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 7.80$ mm).	138
7.9	Triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode médios para cada ponto de Gauss analisado no provete de placa com furo.	144
7.10	Porosidade e deformação total equivalente em cada ponto de Gauss analisado no provete de placa com furo para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 4.70$ mm).	145
7.11	Triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode médios para cada ponto de Gauss analisado no provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte.	151
7.12	Porosidade e deformação total equivalente em cada ponto de Gauss analisado no provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.60$ mm).	152
7.13	Triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode médios para cada ponto de Gauss analisado no provete borboleta em solicitação de corte puro.	158

7.14	Porosidade e deformação total equivalente em cada ponto de Gauss analisado no provete borboleta em solicitação de corte puro para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.60$ mm).	159
8.1	Comparação do valor de porosidade atingido nos diferentes pontos de Gauss pelo modelo multi-escala e pelo modelo de Gurson para o último incremento considerado representativo ($u = 1.58$ mm) na análise do provete entalhado (R4). A diferença relativa é calculada em módulo e tendo como referência o resultado obtido pelo modelo multi-escala.	171
8.2	Comparação da evolução da porosidade no ponto crítico (GP 1) do provete entalhado (R4) entre o modelo multi-escala e o modelo de Gurson. A diferença relativa é calculada em módulo e tendo como referência o resultado obtido pelo modelo multi-escala.	174
8.3	Comparação do valor de porosidade atingido nos diferentes pontos de Gauss pelo modelo multi-escala e pelo modelo de Gurson para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 7.80$ mm) na análise do provete não-entalhado. A diferença relativa é calculada em módulo e tendo como referência o resultado obtido pelo modelo multi-escala.	181
8.4	Comparação da evolução da porosidade no ponto crítico (GP 1) do provete não-entalhado entre o modelo multi-escala e o modelo de Gurson. A diferença relativa é calculada em módulo e tendo como referência o resultado obtido pelo modelo multi-escala.	185
8.5	Comparação do valor de porosidade atingido nos diferentes pontos de Gauss pelo modelo multi-escala e pelo modelo de Gurson para o último incremento considerado representativo ($u = 1.45$ mm) na análise do provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte. A diferença relativa é calculada em módulo e tendo como referência o resultado obtido pelo modelo multi-escala.	191
8.6	Provetes e respectivos pontos de integração de Gauss onde serão realizadas as análises micromecânicas para avaliar a influência da porosidade secundária em diferentes regimes de triaxialidade.	212

Notação

Notação geral

a	Escalar
\mathbf{a}	Tensor de primeira ordem
\mathbf{A}	Tensor de segunda ordem
\mathbf{a}, \mathbf{A}	Tensor de quarta ordem
\mathbf{a}	Vetor associado ao Método dos Elementos Finitos
\mathbf{A}	Matriz associada ao Método dos Elementos Finitos
\mathcal{A}	Espaço, corpo, grupo ou conjunto
\mathfrak{A}	Funcional material constitutivo

Índices

$(\cdot)_d$	Componente desviadora
$(\cdot)_h$	Componente hidrostática
$(\cdot)_{\text{iso}}$	Componente isocórica
$(\cdot)_p$	Componente plástica
$(\cdot)_{\text{sim}}$	Componente simétrica
$(\cdot)_{\text{vol}}$	Componente volumétrica
$(\cdot)_0$	Configuração de referência, instante inicial
$^h(\cdot)$	Domínio discretizado, campo interpolado
$(\cdot)^{(e)}$	Domínio elementar
$(\cdot)^{(g)}$	Domínio global
$(\cdot)_\mu$	Domínio microscópico
$\hat{(\cdot)}$	Funcional constitutivo incremental
$(\cdot)^t$	Histórico até ao instante t
$(\cdot)^{(k)}$	Iteração genérica do Método de Newton-Raphson
$(\cdot)_n$	Incremento temporal genérico do Método dos Elementos Finitos
$(\cdot)^{+/-}$	Parte positiva/negativa da fronteira periódica do EVR

Operadores e simbologia

$\partial(\cdot)/\partial a$	Derivada parcial em ordem a a
$\dot{(\cdot)}$	Derivada temporal de primeira ordem
$\ddot{(\cdot)}$	Derivada temporal de segunda ordem
$\det(\cdot)$	Determinante
$(\cdot) : (\cdot)$	Dupla contração de tensores
$\partial(\cdot)$	Fronteira do domínio
$\Delta(\cdot)$	Incremento, $\Delta(\cdot) = (\cdot)_{n+1} - (\cdot)_n$
$\delta(\cdot)$	Incremento iterativo, $\delta(\cdot) = (\cdot)^{(k+1)} - (\cdot)^{(k)}$
$\ln(\cdot)$	Logaritmo natural
$\ (\cdot)\ $	Norma tensorial euclidiana, descontinuidade de um campo
$\mathbf{A}(\cdot)$	Operador assemblagem de elementos finitos
$\text{div}_x(\cdot)$	Operador divergência espacial
$\text{div}_X(\cdot)$	Operador divergência material
$\nabla_x(\cdot)$	Operador gradiente espacial
$\nabla_X(\cdot)$	Operador gradiente material
$\bigcup(\cdot)$	Operador união
$(\cdot) \otimes (\cdot)$	Produto tensorial de tensores
$\text{tr}(\cdot)$	Traço de um tensor de segunda ordem

Variáveis

\mathbf{A}	Módulo tangente consistente material
\mathbf{a}	Módulo tangente consistente espacial
\mathbf{B}	Tensor de Cauchy-Green esquerdo
\mathbf{B}	Operador gradiente simétrico discreto
\mathcal{B}	Corpo genérico
\mathbf{b}	Forças de volume na configuração deformada
$\bar{\mathbf{b}}$	Forças de volume na configuração de referência
\mathbf{C}	Tensor de Cauchy-Green direito
\mathbf{D}	Tensor de taxa de deformação
$\mathbf{E}^{(m)}, \mathbf{E}^{(0)}$	Tensor de deformação da família de Lagrange, tensor de Hencky
\mathcal{E}	Espaço tridimensional Euclidiano
$\mathbf{e}^{(m)}$	Tensor de deformação da família de Euler
E	Módulo de Young
e	Energia interna específica
\mathbf{F}	Gradiente de deformação
\mathbf{f}^{ext}	Vetor global das forças externas
\mathbf{f}^{int}	Vetor global das forças internas

f	Porosidade
f_p	Porosidade primária
f_s	Porosidade secundária
\mathbf{G}	Operador gradiente discreto
\mathbf{g}	Gradiente espacial do campo de temperatura
\mathbf{I}	Tensor identidade de segunda ordem
J	Determinante do gradiente de deformação
J_2, J_3	Segundo e terceiro invariantes das tensões desviadoras
j	Determinante do jacobiano
\mathbf{K}_T	Matriz de rigidez tangente global
\mathcal{K}	Conjunto de deslocamentos macroscópicos cinematicamente admissíveis
\mathcal{K}_μ	Conjunto de deslocamentos microscópicos cinematicamente admissíveis minimamente restringidos
$\tilde{\mathcal{K}}_\mu$	Conjunto de flutuações de deslocamentos microscópicos cinematicamente admissíveis minimamente restringidos
k	Razão entre o raio do vazio primário e o raio do vazio secundário
\mathbf{L}	Gradiente de velocidade
L	Parâmetro de Lode
l_{macro}	Comprimento característico do domínio macroscópico
l_{EVR}	Comprimento característico do EVR
l_{het}	Comprimento característico das heterogeneidades do EVR
l_{sing}	Comprimento característico das singularidades do EVR
N_i	Função de forma associada ao nó i
\mathbf{n}	Versor normal à superfície ou fronteira
n_{elem}	Número total de elementos finitos
n_{gauss}	Número de pontos de integração de Gauss
$n_{\text{nós}}$	Número de nós do elemento finito
n_{pontos}	Número total de nós da malha de elementos finitos
n_{dim}	Número de graus de liberdade por nó
\mathbf{P}	Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff
p	Pressão hidrostática
\mathbf{q}	Campo vetorial do fluxo de calor
\mathbf{R}	Tensor de rotação
R^v	Raio do vazio esférico
R_p^v	Raio do vazio esférico primário
R_s^v	Raio do vazio esférico secundário
\mathbf{r}	Vetor global das forças residuais
r	Densidade de geração de calor
s	Entropia específica
\mathbf{t}	Tensão resultante de Cauchy, forças de fronteira por unidade de superfície na configuração deformada
$\bar{\mathbf{t}}$	Forças de fronteira por unidade de superfície na configuração de referência

T	Triaxialidade de tensões
T_0	Triaxialidade de tensões associada ao estado de tensão inicial
T_{med}	Triaxialidade de tensões média ao longo do histórico de deformação
t	Instante de tempo
t_f	Instante de tempo final
\mathbf{U}	Tensor de elongação direito
\mathbf{u}	Campo vetorial de deslocamentos
$\bar{\mathbf{u}}$	Campo vetorial de deslocamentos prescritos na fronteira
$\tilde{\mathbf{u}}$	Campo vetorial de flutuação de deslocamentos
u	Deslocamento uniaxial aplicado
\mathbf{V}	Tensor de elongação esquerdo
\mathcal{V}	Espaço dos deslocamentos virtuais
V_μ	Volume total do EVR
V_μ^v	Volume contido pelos vazios do EVR
\mathbf{v}	Campo de velocidades espacial
v_m	Volume específico da matriz de um material poroso
\mathbf{W}_p	Taxa de dissipação plástica
w	Peso do ponto de integração de Gauss
\mathbf{X}	Vetor de posição macroscópico na configuração de referência
\mathbf{x}	Vetor de posição macroscópico na configuração deformada
\mathbf{Y}	Vetor de posição microscópico na configuração de referência
\mathbf{y}	Vetor de posição microscópico na configuração deformada
α	Conjunto de variáveis internas de um modelo constitutivo contínuo
α	Razão de dilatação/contração, Direção de solicitação do provete borboleta, Parâmetro de calibração da lei de endurecimento
β	Conjunto de variáveis internas de um modelo constitutivo contínuo à microescala
β	Parâmetro de calibração da lei de endurecimento
Γ	Fronteira periódica do EVR
γ	Multiplicador plástico
$\bar{\epsilon}$	Deformação total equivalente
$\bar{\epsilon}_f$	Deformação total equivalente final
ϵ_{tol}	Tolerância de convergência
$\bar{\epsilon}$	Erro relativo
$\bar{\epsilon}_r$	Erro relativo médio
ζ	Coordenada do domínio natural
$\boldsymbol{\eta}$	Campo de deslocamentos virtuais
θ	Temperatura, ângulo de Lode
$\bar{\theta}$	Parâmetro do ângulo de Lode
$\bar{\theta}_0$	Parâmetro do ângulo de Lode associado ao estado de tensão inicial
$\bar{\theta}_{\text{med}}$	Parâmetro do ângulo de Lode médio ao longo do histórico de deformação

λ	Fator de carregamento incremental
ν	Coefficiente de Poisson
ξ	Terceiro invariante das tensões desviadoras normalizado
ρ	Massa volúmica
ρ_m	Massa volúmica da matriz de um material poroso
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor das tensões de Cauchy
σ_y	Tensão de cedência do material
$\bar{\sigma}$	Tensão equivalente de von Mises
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensões principais
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor das tensões de Kirchhoff
Υ	Domínio natural normalizado
Φ	Função de cedência
φ	Deformação, movimento
ψ	Energia livre específica
Ω	Região do espaço euclidiano ocupado por um corpo genérico
$\Omega^{(e)}$	Domínio do elemento finito
Ω_μ	Domínio do EVR
Ω_μ^s	Sub-domínio material EVR
Ω_μ^i	Sub-domínio do EVR referente às inclusões
Ω_μ^v	Sub-domínio do EVR referente aos vazios

Página intencionalmente deixada em branco

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização

Ao longo das últimas décadas, o desenvolvimento de novos materiais, produtos e estruturas foi significativamente impulsionado pela utilização de ferramentas computacionais. No domínio da engenharia estrutural destacam-se as designadas técnicas de simulação numérica, as quais resultam da implementação computacional de métodos numéricos que permitem a resolução de um amplo leque de problemas. Entre estes, o Método dos Elementos Finitos é por excelência o método mais utilizado, quer pela comunidade científica quer a nível industrial, devido à sua flexibilidade e versatilidade em termos de aplicação. Atualmente, as técnicas de simulação numérica permitem ao engenheiro analisar e prever com rapidez o comportamento real de novos materiais e estruturas antes de incorrer em custos associados à produção de protótipos e à realização de ensaios experimentais. Face à exigência dos desafios lançados à comunidade científica no desenvolvimento de novos materiais e ao alto nível de competitividade em termos industriais, compreende-se a importância que a mecânica computacional adquire atualmente na aceleração do progresso científico-tecnológico e económico.

Para que os resultados obtidos através de qualquer simulação estrutural sejam fiáveis, é essencial que o comportamento dos materiais seja modelado com precisão. Tal objetivo encontra-se fortemente interligado com a mecânica dos meios contínuos através do desenvolvimento de modelos constitutivos contínuos, baseados geralmente em considerações micro-mecânicas ou fenomenológicas. Um modelo constitutivo consiste num conjunto de equações que estabelece a relação entre o estado de tensão do material, o histórico de deformação e a evolução de variáveis internas associadas a diferentes mecanismos relevantes no comportamento do material e aplicação em causa. Apesar do sucesso da aplicação dos modelos constitutivos tradicionais (como por exemplo o modelo de von Mises) na resolução de um grande leque de problemas em engenharia, estes apresentam limitações em aplicações nas quais os fenómenos complexos que ocorrem ao nível da microestrutura do material são preponderantes no seu comportamento macroscópico. Os fenómenos de dano e de degradação interna assumem particular importância no domínio da engenharia estrutural, dado provocarem uma diminuição generalizada da capacidade de carga do material e definirem os limites de solicitação a que um componente estrutural pode ser sujeito em condições de segurança. Surgiu assim a mecânica do dano contínuo, um dos ramos da mecânica dos

meios contínuos que tem por objetivo fundamental a formulação de modelos constitutivos contínuos capazes de prever o início e evolução do estado de degradação interno do material. Nestes modelos, também baseados em considerações micromecânicas ou fenomenológicas, os mecanismos de dano são incorporados através da introdução de variáveis internas de dano e do estabelecimento das respectivas leis de evolução à macroescala.

Um dos mecanismos de dano mais importantes em metais e ligas metálicas estruturais consiste na fratura dúctil por nucleação, crescimento e coalescência de vazios. O primeiro modelo contínuo de fratura dúctil surgiu em meados da década de 70 e foi desenvolvido por Gurson (Gurson (1975), Gurson (1977)), baseado em considerações micromecânicas. Apesar da simplicidade das hipóteses assumidas na sua formulação, o modelo de Gurson é ainda hoje um dos mais conhecidos e mais utilizados modelos de fratura de metais dúcteis porosos. Para além da sua importância *per se*, este modelo estabeleceu o ponto de partida e a base conceptual da principal metodologia de desenvolvimento deste tipo de modelos. No princípio da década de 80 iniciou-se um progresso significativo da modelação de fratura dúctil que se estende até aos dias hoje, surgindo numerosos modelos que contemplam aspetos cada vez mais complexos da evolução da microestrutura do material. No entanto, existem ainda grandes desafios a superar neste contexto, nomeadamente relacionados com a modelação explícita dos mecanismos de nucleação de vazios, com as interações entre populações de vazios de diferentes dimensões e com a interligação dos diferentes mecanismos de nucleação, crescimento e coalescência de vazios num único modelo constitutivo de dano contínuo. Pelo facto dos modelos de dano contínuos requererem o estabelecimento de leis de evolução das variáveis de dano e a sua incorporação na função de cedência que governa o comportamento macroscópico do material, a complexidade crescente dos fenómenos microscópicos que se pretendem modelar impõe limitações ao seu desenvolvimento futuro.

Para ultrapassar as limitações associadas à complexidade da microestrutura dos materiais e dos fenómenos que ocorrem a esse nível, surgiu uma nova aproximação designada por modelação multi-escala. Esta tem por objetivo principal estabelecer a relação entre o comportamento macroscópico dos materiais e a evolução da sua microestrutura heterogénea através da troca contínua de informação entre escalas. De entre os diferentes tipos de modelos multi-escala são aqui destacados os modelos multi-escala hierárquicos, nos quais as dimensões características da macro e da microescala são suficientemente separadas e, consequentemente, ambas as escalas podem ser hierarquicamente acopladas no mesmo ponto do domínio macroscópico. Em particular, nos designados modelos multi-escala baseados em homogeneização computacional, os tensores de tensão macroscópicos são obtidos através de um procedimento de homogeneização volumétrica aplicado sobre um elemento de volume representativo da microestrutura do material. Neste último é possível modelar explicitamente os constituintes e heterogeneidades que caracterizam a microestrutura complexa do material e cuja evolução irá ser convenientemente homogeneizada para determinar a resposta macroscópica. Um modelo multi-escala baseado em homogeneização computacional envolve assim a resolução de um problema de equilíbrio estrutural macroscópico ao qual é incorporada uma análise simultânea à microescala e que permite contemplar os diversos fenómenos e mecanismos que ocorrem ao nível da microestrutura do material. Compreende-se assim a grande potencialidade deste tipo de modelação no desenvolvimento de novos materiais, cuja definição da microestrutura é cada vez mais exigente no que diz respeito à otimização das suas propriedades mecânicas. Deve também destacar-se a sua potencialidade na verificação, desenvolvimento e otimização de modelos constitutivos contínuos.

Apesar das bases da modelação multi-escala por homogeneização computacional se encontrarem já bem estabelecidas, trata-se de um tema relativamente recente na comunidade da mecânica computacional. É também importante referir que a capacidade de implementação computacional e de aplicação deste tipo de modelos é ainda bastante limitada ao nível da comunidade que se dedica ao estudo do comportamento dos materiais, nomeadamente no que diz respeito à modelação da fratura dúctil de metais e ligas metálicas estruturais. É neste último domínio que a presente dissertação pretende dar um dos primeiros contributos através da aplicação de um modelo multi-escala baseado em homogeneização computacional.

1.2 Objetivos

O objetivo principal da presente dissertação consiste na aplicação de um modelo multi-escala baseado em homogeneização computacional para avaliar a precisão do modelo de Gurson na previsão da evolução de dano associada à fratura dúctil de ligas metálicas.

Em primeiro lugar é estudado o comportamento do modelo de Gurson em diferentes regimes de triaxialidade, sendo dada particular importância à evolução e localização de dano ao longo do histórico de deformação. Para tal, é realizado um conjunto de análises tridimensionais à macroescala de diversos provetes sujeitos a solicitações monotónicas de tração e corte.

Em segundo lugar, o mesmo conjunto de análises tridimensionais é de novo realizado recorrendo a um modelo multi-escala baseado em homogeneização computacional. Tendo por base de comparação os resultados obtidos pelo modelo de Gurson e através da modelação de um EVR consistente com as hipóteses assumidas no mesmo, a precisão do modelo é avaliada quer no domínio macroscópico quer no domínio microscópico. É ainda realizado um pequeno estudo complementar através da modelação de um EVR de maior complexidade, visando averiguar a hipótese de representatividade de uma única população de vazios implicitamente assumida pelo modelo de Gurson.

Tratando-se de resultados pioneiros no que diz respeito à aplicação de um modelo multi-escala na análise tridimensional do comportamento de materiais sujeitos a grandes deformações, pretende-se simultaneamente evidenciar as potencialidades e vantagens deste tipo de modelação.

1.3 Estrutura do documento

Esta dissertação encontra-se estruturada em capítulos da seguinte forma:

Capítulo 2

No Capítulo 2 começam por ser introduzidos os conceitos, entidades e relações da mecânica dos meios contínuos fundamentais ao desenvolvimento de qualquer modelo que caracterize o comportamento de um sólido em deformação. Após a definição e descrição de um modelo constitutivo baseado em variáveis internas, é estabelecido o problema mecânico de valor de fronteira inicial.

Capítulo 3

No Capítulo 3 são descritos os aspectos essenciais da aplicação do Método dos Elementos Finitos na resolução de um problema mecânico quasi-estático de valor de fronteira inicial. Em particular, as suas etapas são percorridas de forma sequencial e descritas com o devido detalhe.

Capítulo 4

No Capítulo 4 são apresentados os conceitos fundamentais à compreensão de um modelo multi-escala baseado em homogeneização computacional. Em primeiro lugar é introduzido o conceito de elemento de volume representativo, é realizada uma caracterização global de um modelo multi-escala e descrito o conceito de homogeneização com base no Princípio da Separação de Escalas. Em segundo lugar são detalhadas todas as etapas necessárias à definição do problema de equilíbrio à microescala, seguindo a caracterização das restrições cinemáticas associadas às principais condições de fronteira. Por último descrevem-se sucinatamente as diferentes etapas de aplicação do Método dos Elementos Finitos ao problema de equilíbrio à microescala.

Capítulo 5

O Capítulo 5 é essencialmente dedicado à descrição do programa LINKS, cujas capacidades de simulação computacional são exploradas no âmbito da presente dissertação. Em primeiro lugar é apresentada uma representação esquemática e uma descrição concisa das diferentes capacidades de análise do programa. Em segundo lugar são apresentadas as implementações computacionais realizadas e necessárias para atingir os objetivos estabelecidos.

Capítulo 6

No Capítulo 6 é realizada uma descrição detalhada da fratura dúctil de metais e ligas metálicas estruturais por nucleação, crescimento e coalescência de vazios. Em primeiro lugar é realizado um enquadramento global dos aspectos da fratura dúctil sobre os quais incide a presente dissertação. Em seguida são introduzidos e descritos, com base em evidências experimentais, os mecanismos macroscópicos e microscópicos que caracterizam a fratura dúctil por nucleação, crescimento e coalescência de vazios. Segue-se uma revisão dos principais estudos micromecânicos realizados e modelos contínuos de fratura de materiais dúcteis porosos desenvolvidos até à data. Por último é apresentada a formulação e são identificadas as limitações do modelo de Gurson.

Capítulo 7

No Capítulo 7 é estudado o comportamento do modelo de Gurson em diferentes regimes de triaxialidade, realizando um conjunto de análises tridimensionais à macroescala através deste modelo. Para tal, em primeiro lugar são caracterizados os diferentes provetes avaliados, nomeadamente a sua geometria e o estado de tensão promovido. Em segundo lugar é determinada a lei de endurecimento do material selecionado através de um procedimento de calibração de natureza iterativa e baseado no conhecimento da curva força-deslocamento experimental. Em terceiro lugar são indicados os parâmetros de simulação pertinentes e, em seguida, são apresentados e discutidos de forma sistemática os resultados obtidos para

cada um dos provetes. Por último são estabelecidas as principais conclusões do conjunto de análises realizado.

Capítulo 8

No Capítulo 8 procura-se atingir o objetivo principal da presente dissertação, realizando dois conjuntos de análises comparativas que visam avaliar a precisão do modelo de Gurson em diferentes regimes de triaxialidade através de um modelo multi-escala baseado em homogeneização computacional. Para cada um destes são, em primeiro lugar, indicados os parâmetros de simulação pertinentes e, em seguida, apresentados e discutidos de forma sistemática os resultados obtidos para cada um dos provetes. Para terminar são estabelecidas as principais conclusões retiradas dos dois conjuntos de análises realizados.

Capítulo 9

Por fim, no Capítulo 9 são apresentadas as principais conclusões alcançadas. São ainda indicadas algumas sugestões de trabalhos futuros que se consideram pertinentes.

Página intencionalmente deixada em branco

Capítulo 2

Mecânica dos Meios Contínuos

2.1 Introdução

Subjacente à formulação dos modelos constitutivos que caracterizam o comportamento de um sólido em deformação, encontram-se os conceitos básicos de mecânica dos meios contínuos e os princípios fundamentais da termodinâmica. Estes permitem estabelecer as entidades e relações fundamentais necessárias ao desenvolvimento de um modelo constitutivo baseado em variáveis internas, o qual é definido e descrito com o devido detalhe neste capítulo. Por último é estabelecido o designado problema mecânico de valor de fronteira inicial e deduzida a sua forma fraca, passível de ser resolvida pelo Método dos Elementos Finitos.

2.2 Conceitos básicos

Partícula material e meio contínuo

Ao nível microscópico a matéria apresenta uma estrutura atômica discreta ou descontínua, composta por partículas atômicas e subatômicas com um determinado arranjo espacial e que apresentam espaços vazios entre si. As teorias que procuram descrever o comportamento dos materiais considerando a estrutura microscópica discreta da matéria designam-se por teorias atômicas e moleculares. Apesar da sua importância no estudo dos mais diversos fenómenos físicos, o tratamento da matéria ao nível atômico torna-se demasiado complexo e pouco útil para a grande maioria das aplicações de engenharia (Holzapfel, 2000).

A mecânica dos meios contínuos surge assim como uma ferramenta poderosa que permite descrever o comportamento de um material sólido sem necessitar do conhecimento detalhado da sua estrutura microscópica complexa (Holzapfel, 2000). Tal teoria baseia-se na hipótese fundamental de que um determinado corpo \mathcal{B} , de fronteira $\partial\mathcal{B}$, pode ser visto como tendo uma distribuição de matéria contínua, i.e. a microestrutura complexa e real da matéria é conceptualmente homogeneizada e o corpo é tomado como um conjunto contínuo de partículas materiais $P \in \mathcal{B}$ (ver Figura 2.1). Surge assim o conceito de corpo material contínuo ou simplesmente meio contínuo. No contexto da mecânica dos meios contínuos, uma partícula material é definida como um conjunto numeroso de moléculas e o seu comportamento é consequência da contribuição coletiva de todas as moléculas que a constituem. Tal comportamento é descrito por um dado conjunto de quantidades que procuram reproduzir o

comportamento médio das partículas atômicas da matéria. Esta idealização da realidade conduz à obtenção de soluções não exatas mas suficientemente precisas para a generalidade das aplicações de engenharia, nas quais as dimensões em causa são bastante superiores às distâncias interatômicas.

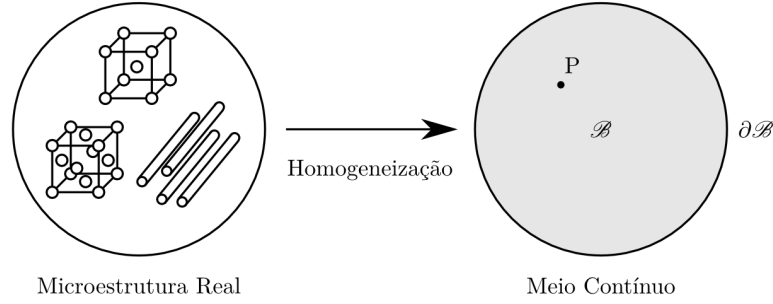


Figura 2.1: Representação esquemática da hipótese fundamental subjacente à mecânica dos meios contínuos.

Configuração de um sólido

Considere-se \mathcal{B} um corpo que ocupa uma região aberta Ω do espaço tridimensional Euclidiano \mathcal{E} com uma fronteira regular $\partial\Omega$ num determinado instante t (ver Figura 2.2). Considere-se ainda um referencial de coordenadas cartesianas ortogonal fixado na origem O e formado pela base de vetores ortonormais \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$. A região geométrica do espaço ocupada pelo corpo \mathcal{B} no instante t e unicamente definida em relação ao referencial cartesiano \mathbf{e}_i designa-se por configuração do corpo \mathcal{B} no instante t .

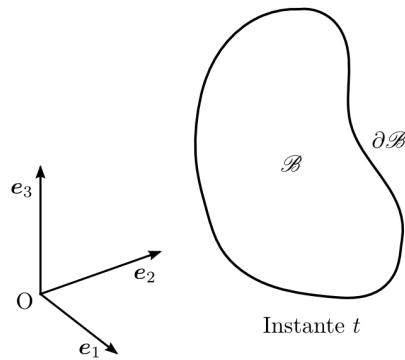


Figura 2.2: Conceito de configuração de um corpo \mathcal{B} num determinado instante t em relação a um referencial cartesiano de base ortonormal \mathbf{e}_i .

Na abordagem a qualquer problema é geralmente definido um referencial de coordenadas fixo no espaço e associado a um determinado instante de referência t_0 . Aqui será tomado o instante inicial $t = 0$ como instante de referência e deste modo a configuração de referência Ω_0 do corpo \mathcal{B} coincide com a sua configuração inicial não deformada (ver Figura 2.3). Na sua configuração de referência, qualquer partícula material $P \in \mathcal{B}$ que ocupa o ponto X do espaço é definida pelo vetor de posição \mathbf{X} entre a origem O e o ponto X ¹. Num qualquer instante t subsequente, o corpo \mathcal{B} irá ocupar uma nova região Ω do espaço. A configuração do corpo \mathcal{B} no instante t designa-se por configuração atual ou deformada e a posição correspondente à mesma partícula $P \in \mathcal{B}$ considerada anteriormente coincide com o ponto x e é definida pelo vetor de posição \mathbf{x} .

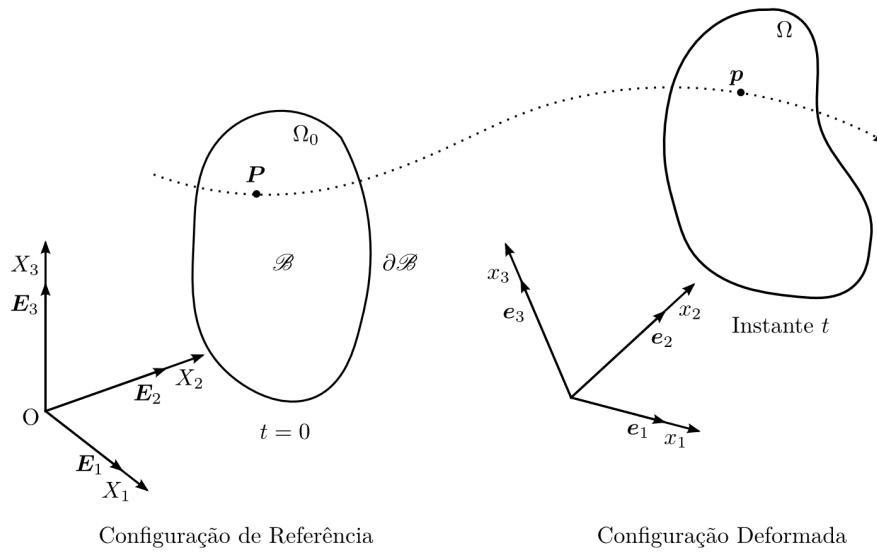


Figura 2.3: Configurações e movimento de um corpo contínuo.

Em cada instante t , a configuração do corpo \mathcal{B} pode ser definida em relação um referencial cartesiano específico. Neste sentido, o referencial cartesiano de referência será definido pela base ortonormal \mathbf{E}_i , $i = 1, 2, 3$, e o ponto X é definido pelas coordenadas materiais (ou de referência) X_i , $i = 1, 2, 3$, tal que $\mathbf{X} = X_i \mathbf{E}_i$. Do mesmo modo, o referencial cartesiano associado à configuração deformada será definido pela base ortonormal \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$, e o ponto x é definido pelas coordenadas espaciais (ou atuais) x_i , $i = 1, 2, 3$, tal que $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$. Neste documento os referenciais \mathbf{E}_i e \mathbf{e}_i serão tomados como coincidentes, porém a distinção de notação será mantida de modo a identificar grandezas associadas à configuração de referência ou deformada.

¹Ao contrário da notação adotada para tensores de primeira ordem, o vetor de posição de uma partícula na configuração de referência será sempre denotado por \mathbf{X} .

2.3 Cinemática e medidas de deformação

2.3.1 Deformação e movimento de um corpo

Considere-se \mathcal{B} um corpo que ocupa uma região aberta Ω do espaço tridimensional Euclidiano \mathcal{E} com uma fronteira regular $\partial\Omega$ na sua configuração de referência. O movimento de um corpo \mathcal{B} é descrito pelo mapeamento das partículas materiais $P \in \mathcal{B}$ entre uma configuração inicial de referência e a configuração atual e pode ser interpretado como a sobreposição de duas componentes distintas:

- *Deslocamento de corpo rígido.* Consiste numa translação e/ou rotação de tal modo que a distância relativa entre as partículas se mantém constante e consequentemente o corpo não sofre qualquer deformação (ver Figura 2.4);

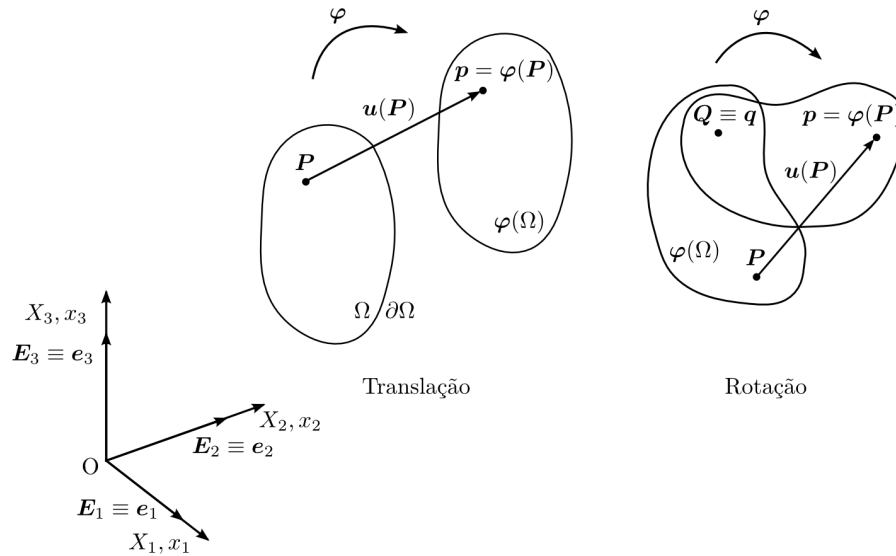


Figura 2.4: Deslocamentos de corpo rígido.

- *Deformação.* Associada à variação da distância relativa entre as partículas e consequente deformação em extensão, compressão e corte do corpo, resultando na alteração da sua forma geométrica.

Formalmente, a deformação de um corpo \mathcal{B} (ver Figura 2.5) é definida por uma função suave e unívoca

$$\varphi : \Omega \rightarrow \mathcal{E}, \quad (2.1)$$

que descreve o mapeamento entre a posição de cada partícula material \mathbf{X} na configuração de referência Ω e a posição \mathbf{x} na configuração deformada $\varphi(\Omega)$ dada por

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}). \quad (2.2)$$

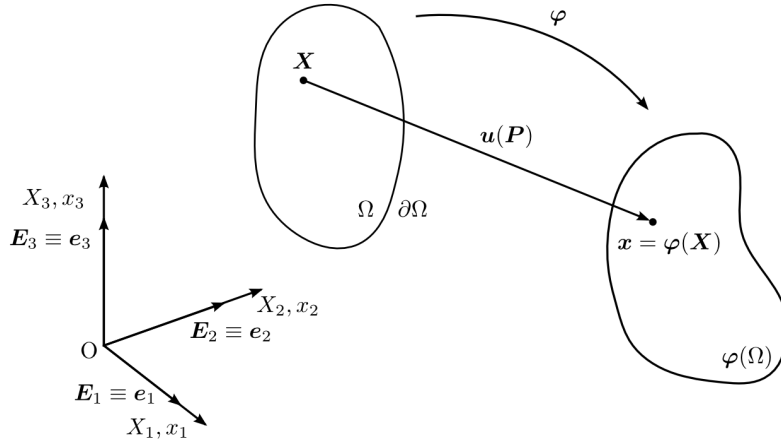


Figura 2.5: Deformação de um corpo.

Atendendo à Figura 2.5, o campo de deslocamentos associado à deformação de \mathcal{B} é dado por

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) - \mathbf{X}, \quad (2.3)$$

pelo que pode escrever-se

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}). \quad (2.4)$$

Compreende-se com facilidade que os deslocamentos de corpo rígido (translação e rotação) podem ser considerados como uma deformação definida por

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) + \mathbf{R}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (2.5)$$

em que \mathbf{R} é um tensor de rotação e \mathbf{q} é o ponto em torno do qual o corpo \mathcal{B} sofre a rotação (ver Figura 2.4).

Generalizando, o movimento de um corpo \mathcal{B} pode ser entendido como uma deformação dependente do tempo e definido pela função

$$\boldsymbol{\varphi} : \Omega \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (2.6)$$

de tal modo que para cada instante t , o mapeamento

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) \quad (2.7)$$

traduz uma deformação do corpo \mathcal{B} para a sua configuração deformada $\boldsymbol{\varphi}_t \equiv \boldsymbol{\varphi}(\Omega, t)$ (ver Figura 2.6). Por outro lado, para uma determinada partícula material definida pela posição \mathbf{X} , traduz a trajetória dessa partícula ao longo do tempo durante o movimento do corpo \mathcal{B} . Em termos do campo de deslocamentos, o mapeamento entre a configuração de referência e a configuração deformada pode então escrever-se

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t). \quad (2.8)$$

Com base nesta definição, a velocidade de uma partícula material definida por \mathbf{X} é dada por

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (2.9)$$

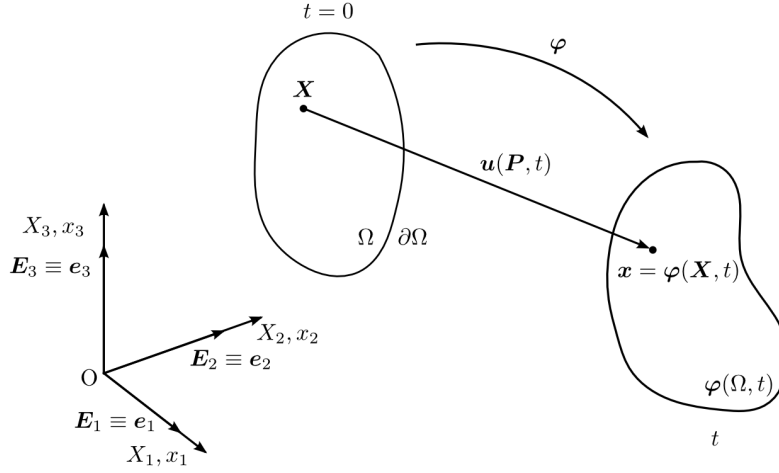


Figura 2.6: Movimento de um corpo.

Recordando que a função de mapeamento φ é unívoca, a posição \mathbf{X} de uma partícula material na sua configuração de referência pode ser expressa em função da posição \mathbf{x} que ocupa num determinado instante t tal que

$$\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{u}(\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t), t), \quad (2.10)$$

em que φ^{-1} é a função de mapeamento para a configuração de referência. Com base nesta função é possível definir a velocidade de uma partícula material localizada no ponto \mathbf{x} no instante t por

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{x}}(\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t), t). \quad (2.11)$$

2.3.2 Descrição material e espacial

Em mecânica dos meios contínuos, a análise de grandes deformações requer uma distinção cuidadosa dos diferentes referenciais de coordenadas que podem ser escolhidos para descrever o comportamento do corpo cujo movimento se pretende analisar (Bonet and Wood, 2008). Segundo a descrição material (ou de Lagrange), o movimento e qualquer quantidade relevante associada ao corpo são descritos em relação às coordenadas materiais (ou de referência) X_i , $i = 1, 2, 3$ e ao tempo t (Holzapfel, 2000). A descrição material consiste pois na fixação de uma partícula material \mathbf{X} do corpo \mathcal{B} e na observação da evolução das variáveis ao longo do seu movimento. A velocidade definida pela Equação (2.9) designa-se assim por velocidade material, dado que apresenta como argumentos a posição \mathbf{X} de uma partícula material na configuração de referência e o tempo t . Segundo a descrição espacial (ou de Euler), o movimento e qualquer quantidade relevante associada ao corpo são descritos em relação às coordenadas espaciais (ou atuais) x_i , $i = 1, 2, 3$ e ao tempo t (Holzapfel, 2000). A descrição espacial consiste então na fixação de um ponto \mathbf{x} no espaço e na observação da evolução das variáveis nesse ponto ao longo do tempo. A velocidade definida pela Equação (2.11) designa-se assim por velocidade espacial, dado que apresenta como argumentos o tempo t e a posição espacial \mathbf{x} , ocupada por uma dada partícula material do corpo \mathcal{B} em cada instante t .

Em função da descrição adotada também diversos operadores devem ser distinguidos. Os operadores gradiente material e espacial de um campo genérico α , denotados respetivamente por $\nabla_X \alpha$ e $\nabla_x \alpha$, são definidos por

$$\nabla_X \alpha = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \alpha(\mathbf{X}, t), \quad \nabla_x \alpha = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \alpha(\mathbf{x}, t), \quad (2.12)$$

i.e. são respetivamente as derivadas de α em ordem a \mathbf{X} e \mathbf{x} para t fixo (de Souza Neto et al., 2008). Com base nestes, a divergência material e espacial de um tensor de primeira ordem genérico \mathbf{a} , denotados respetivamente por $\text{div}_X \mathbf{a}$ e $\text{div}_x \mathbf{a}$, são definidos por

$$\text{div}_X \mathbf{a} = \text{tr}(\nabla_X \mathbf{a}), \quad \text{div}_x \mathbf{a} = \text{tr}(\nabla_x \mathbf{a}), \quad (2.13)$$

e as componentes cartesianas da divergência material e espacial de um tensor de segunda ordem genérico \mathbf{A} são definidas respetivamente por

$$(\text{div}_X \mathbf{A})_i = \frac{\partial A_{ij}}{\partial X_j}, \quad (\text{div}_x \mathbf{A})_i = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.14)$$

2.3.3 Gradiente de deformação

Uma das quantidades fundamentais para descrever grandes deformações de um meio contínuo consiste no gradiente de deformação \mathbf{F} , tensor de segunda ordem que surge implicitamente ou explicitamente em todas as equações que relacionam quantidades na configuração de referência com as quantidades correspondentes na configuração deformada (Bonet and Wood, 2008).

O gradiente de deformação \mathbf{F} do movimento $\boldsymbol{\varphi}$ é definido na descrição material por

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \nabla_X \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}_t}{\partial \mathbf{X}}, \quad (2.15)$$

e atendendo à Equação (2.8) pode reescrever-se

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{I} + \nabla_X \mathbf{u}, \quad (2.16)$$

em que \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem. Considerando alternativamente a descrição espacial, o gradiente de deformação \mathbf{F} pode ser definido de forma equivalente por

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \left[\nabla_x \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{x}, t) \right]^{-1} = [\mathbf{I} - \nabla_x \mathbf{u}]^{-1}. \quad (2.17)$$

Do ponto de vista físico, o gradiente de deformação permite que a posição espacial relativa entre duas partículas materiais vizinhas após a deformação do corpo seja descrita em termos da sua posição espacial relativa na configuração de referência (Bonet and Wood, 2008). Considere-se uma partícula material P e uma partícula material Q (ver Figura 2.7) cuja posição relativa em relação à primeira é dada pelo vetor elementar $d\mathbf{X}_Q$ na configuração de referência por

$$d\mathbf{X}_Q = \mathbf{X}_Q - \mathbf{X}_P. \quad (2.18)$$

Após o movimento $\boldsymbol{\varphi}$ até um dado instante t , a posição espacial das partículas materiais P e Q é dada respetivamente por

$$\mathbf{x}_P = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}_P, t), \quad \mathbf{x}_Q = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}_Q, t), \quad (2.19)$$

e o correspondente vetor elementar por

$$d\mathbf{x}_Q = \mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}_P, t) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}_Q, t). \quad (2.20)$$

Verifica-se então facilmente que o vetor elementar $d\mathbf{x}_Q$ na configuração deformada pode ser obtido a partir do vetor elementar $d\mathbf{X}_Q$ na configuração de referência através do gradiente de deformação por

$$d\mathbf{x}_Q = \mathbf{F} d\mathbf{X}_Q. \quad (2.21)$$

Note-se que o gradiente de deformação \mathbf{F} define uma transformação linear entre tensores de primeira ordem na configuração de referência e na configuração deformada.

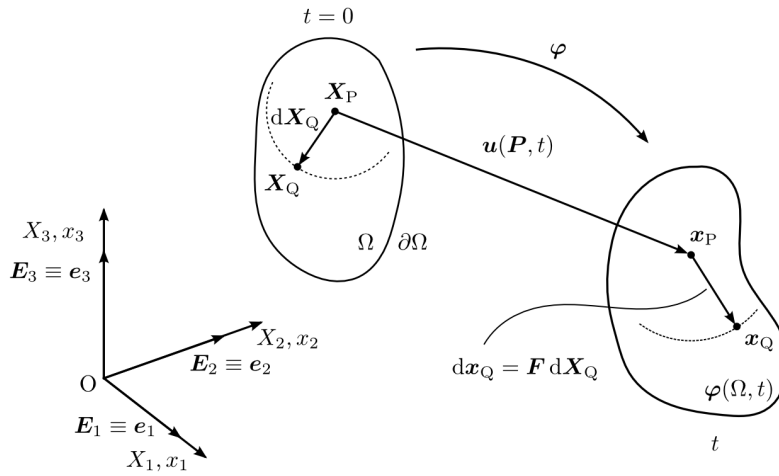


Figura 2.7: Representação esquemática do significado físico do gradiente de deformação.

O gradiente de deformação \mathbf{F} é geralmente dependente das coordenadas materiais X_i , $i = 1, 2, 3$, e a deformação do corpo é dita não-homogênea. Pelo contrário, uma deformação caracterizada por um gradiente de deformação uniforme, i.e. \mathbf{F} independente de \mathbf{X} , é designada por deformação homogênea. Uma deformação de um corpo \mathcal{B} apenas é homogênea se e só se admite a forma

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}_P) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}_Q) + \mathbf{F}(\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q) \quad (2.22)$$

para todos os pontos $P, Q \in \mathcal{B}$ e com \mathbf{F} sendo um tensor definido positivo (de Souza Neto et al., 2008).

Decomposição isocórica/volumétrica

Qualquer deformação pode ser localmente decomposta numa componente volumétrica e numa componente isocórica (ou de distorção). É trivial demonstrar (Bonet and Wood (2008), de Souza Neto et al. (2008)) que o determinante do gradiente de deformação, aqui denotado por J , representa, localmente, o volume após deformação por unidade de volume de referência, i.e.

$$J = \det \mathbf{F} = \frac{dV}{dV_0}. \quad (2.23)$$

Note-se que na configuração de referência temos $J = 1$ ($\mathbf{F} = \mathbf{I}$) e em qualquer configuração deformada deve ser satisfeita a condição $J > 0$, pois para $J = 0$ ocorreria o colapso do corpo numa partícula material.

Uma deformação isocórica consiste numa deformação que não provoca qualquer alteração do volume do corpo. Deste modo, decorre da Equação (2.23) que uma deformação isocórica local é definida matematicamente por

$$J = 1, \quad (2.24)$$

já que $dV = dV_0$. Por sua vez, uma deformação volumétrica consiste numa dilatação ou contração pura e uniforme do corpo em todas as direções e é caracterizada por um gradiente de deformação esférico

$$\mathbf{F} = \alpha \mathbf{I}, \quad (2.25)$$

em que α é a razão de dilatação/contração.

Atendendo aos dois tipos de deformação caracterizados, o gradiente de deformação associado a qualquer deformação local pode ser decomposto como (ver Figura 2.8)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{iso}} \mathbf{F}_{\text{vol}} = \mathbf{F}_{\text{vol}} \mathbf{F}_{\text{iso}}, \quad (2.26)$$

em que a componente isocórica é definida por

$$\mathbf{F}_{\text{iso}} = (\det \mathbf{F})^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}, \quad (2.27)$$

e a componente volumétrica por

$$\mathbf{F}_{\text{vol}} = (\det \mathbf{F})^{\frac{1}{3}} \mathbf{I}. \quad (2.28)$$

Note-se que a condição de preservação do volume subjacente à componente isocórica é satisfeita, já que $\det \mathbf{F}_{\text{iso}} = 1$ e, adicionalmente, verifica-se $\det \mathbf{F}_{\text{vol}} = \det \mathbf{F}$.

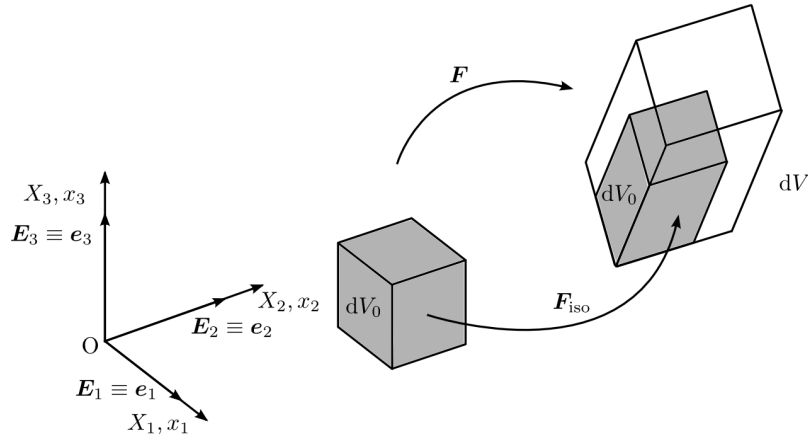


Figura 2.8: Representação esquemática da decomposição isocórica/volumétrica do gradiente de deformação.

Decomposição polar

O gradiente de deformação pode alternativamente ser decomposto numa componente de rotação pura e numa componente de alongação pura. A decomposição polar do gradiente de deformação é dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (2.29)$$

em que \mathbf{R} é o tensor local de rotação (tensor ortogonal próprio) e \mathbf{U} e \mathbf{V} são respetivamente os tensores de alongação direito e esquerdo (tensores simétricos definidos positivos), relacionados por

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T. \quad (2.30)$$

Do ponto de vista físico, na decomposição polar à direita ($\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$) o corpo sofre uma deformação seguida de uma rotação, enquanto na decomposição polar à esquerda ($\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$) o corpo sofre uma rotação seguida de uma deformação. A configuração deformada final é naturalmente idêntica em ambos os casos.

Os tensores de alongação direito e esquerdo são respetivamente definidos por

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}, \quad \mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}, \quad (2.31)$$

em que os tensores \mathbf{C} e \mathbf{B} são respetivamente os tensores de Cauchy-Green direito e esquerdo, expressos em função do gradiente de deformação por

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T. \quad (2.32)$$

Dado que os tensores \mathbf{U} e \mathbf{V} são simétricos, decorre ainda do Teorema Espectral que estes admitem a decomposição espectral

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{E}_i^* \otimes \mathbf{E}_i^*, \quad \mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{e}_i^* \otimes \mathbf{e}_i^*, \quad (2.33)$$

em que os valores próprios $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ de ambos os tensores se designam por alongações principais e os vetores próprios \mathbf{E}_i^* e \mathbf{e}_i^* formam bases ortonormais que definem respetivamente as direções principais Lagrangeanas e Eulerianas. A decomposição espectral dos tensores de alongação direito e esquerdo implica que em qualquer deformação, a alongação local de uma partícula material pode ser sempre expressa pela sobreposição de alongações ao longo de três direções mutuamente ortogonais (de Souza Neto et al., 2008). As direções principais Lagrangeanas e Eulerianas encontram-se relacionadas por uma rotação tal que

$$\mathbf{E}_i^* = \mathbf{R} \mathbf{e}_i^*, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.34)$$

2.3.4 Tensores de deformação

O gradiente de deformação é o tensor fundamental que descreve a cinemática de grandes deformações e que caracteriza a alteração da posição relativa entre as partículas materiais durante o movimento do corpo. Ao contrário dos deslocamentos, quantidades mensuráveis, as deformações são baseadas em conceitos e por este motivo diversos tensores de deformação foram propostos na literatura para quantificar a deformação de um corpo (Holzapfel, 2000). Note-se que todos estes tensores procuram descrever o mesmo fenómeno físico e a escolha do mais adequado é de certo modo arbitrária, baseada na conveniência física e matemática do aspeto fenomenológico que se pretende modelar.

Existem duas grandes famílias de tensores de deformação derivados do gradiente de deformação e que são comumente utilizadas em mecânica dos meios contínuos. Os tensores de deformação da família de Lagrange são baseados no tensor de elongação direito e definidos por

$$\mathbf{E}^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \mathbf{I}), & m \neq 0, \\ \ln[\mathbf{U}], & m = 0, \end{cases} \quad (2.35)$$

em que m é um número real e $\ln[\cdot]$ denota o logaritmo tensorial de $[\cdot]$. No caso particular de $m = 0$, é definido o tensor de Hencky

$$\mathbf{E}^{(0)} = \ln[\mathbf{U}] = \ln\left[\sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}\right]. \quad (2.36)$$

Através da decomposição espectral dos tensores de deformação desta família temos

$$\mathbf{E}^{(m)} = \sum_{i=1}^3 f(\lambda_i) \mathbf{E}_i^* \otimes \mathbf{E}_i^*, \quad (2.37)$$

em que

$$f(\lambda_i) = \begin{cases} \frac{1}{m}(\lambda_i^m - 1), & m \neq 0, \\ \ln \lambda_i, & m = 0, \end{cases} \quad (2.38)$$

pelo que mede deformações ao longo das direções principais de Lagrange (de Souza Neto et al., 2008). Analogamente, os tensores de deformação da família de Euler são baseados no tensor de elongação esquerdo e definidos por

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \begin{cases} \frac{1}{m}(\mathbf{V}^m - \mathbf{I}), & m \neq 0, \\ \ln[\mathbf{V}], & m = 0, \end{cases} \quad (2.39)$$

ou em termos das direções principais de Euler

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \sum_{i=1}^3 f(\lambda_i) \mathbf{e}_i^* \otimes \mathbf{e}_i^*, \quad (2.40)$$

em que os valores próprios $f(\lambda_i)$ são dados igualmente pela Equação (2.38). Os tensores de deformação de Lagrange e de Euler encontram-se relacionados pela expressão

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \mathbf{R} \mathbf{E}^{(m)} \mathbf{R}^T, \quad (2.41)$$

em que \mathbf{R} é o tensor local de rotação. Note-se ainda que, para qualquer valor de m , os tensores de deformação de ambas as famílias são nulos se e só se o gradiente de deformação estiver associado localmente a um deslocamento de corpo rígido (translação e/ou rotação).

2.4 Forças e medidas de tensão

Até este ponto foram somente introduzidas as entidades que permitem descrever e quantificar a deformação de um corpo, não tendo sido feita qualquer referência às forças aplicadas com esta diretamente relacionadas. Do ponto de vista puramente mecânico, as forças aplicadas num corpo podem ser classificadas em dois grandes grupos:

- *Forças de volume.* Forças exercidas no interior do corpo e medidas em força por unidade de volume;
- *Forças de superfície.* Devido à sua semelhança, as forças de superfície podem incluir forças de fronteira ou forças internas de interação e são medidas em força por unidade de superfície. As forças de fronteira são forças exteriores aplicadas na superfície do corpo, enquanto as forças internas de interação surgem da transmissão de força na superfície de contacto entre diferentes partes do próprio corpo.

Subjacente à quantificação de forças de superfície encontra-se o conceito fundamental de tensão e, à semelhança do que sucede na quantificação de deformações, existem igualmente diversos tensores de tensão. Entre os mais comuns encontra-se o tensor das tensões de Cauchy e o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff.

2.4.1 Tensor das tensões de Cauchy

Considere-se um corpo \mathcal{B} numa configuração deformada arbitrária e \mathcal{S} uma superfície orientada de \mathcal{B} definida pelo versor unitário \mathbf{n} no ponto \mathbf{x} . O axioma de Cauchy enuncia que ‘No ponto \mathbf{x} , a intensidade e direção da força de superfície por unidade de área exercida na superfície \mathcal{S} depende somente do versor unitário \mathbf{n} que define a orientação de \mathcal{S} ’. A força de superfície por unidade de área deformada é designada por tensão resultante de Cauchy e denotada por $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$.

O teorema de Cauchy estabelece que a dependência da tensão resultante de Cauchy em ordem ao versor \mathbf{n} é linear, i.e. existe um tensor de segunda ordem $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ tal que

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{n}, \quad (2.42)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}$ é o designado tensor das tensões de Cauchy, formalmente definido em termos da base ortonormal \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$, por

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (2.43)$$

Note-se que o tensor das tensões de Cauchy é um tensor espacial na medida em que é definido com base na configuração deformada do corpo. Como resultado do balanço de momento angular, o tensor das tensões de Cauchy é simétrico

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \quad (2.44)$$

e admite a decomposição espectral

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{e}_i^* \otimes \mathbf{e}_i^*, \quad (2.45)$$

em que os valores próprios $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ se designam por tensões principais e os vetores próprios $\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*\}$ formam um base ortonormal que define as direções principais de tensão.

2.4.2 Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff

O primeiro tensor de Piola-Kirchhoff, denotado por \mathbf{P} , consiste essencialmente na versão material do tensor das tensões de Cauchy. Enquanto que o vetor tensão resultante de Cauchy $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ é definido por unidade de superfície deformada, o vetor tensão resultante $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathbf{m})$ é definido por unidade de superfície de referência como

$$\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathbf{m}) = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{m}, \quad (2.46)$$

em que \mathbf{m} é o versor normal à superfície \mathcal{S} na configuração de referência. A expressão anterior sugere que a força de superfície por unidade de área de referência seja expressa por

$$\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathbf{m}) = \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{m}, \quad (2.47)$$

em que o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff é então definido por

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}. \quad (2.48)$$

Note-se que ao contrário do tensor das tensões de Cauchy, o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff é geralmente não-simétrico (de Souza Neto et al., 2008).

2.4.3 Decomposição desviadora/hidrostática

À semelhança da decomposição isocórica/volumétrica do gradiente de deformação, também o tensor das tensões de Cauchy e o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff podem ser decompostos numa componente desviadora (associada a uma deformação isocórica) e numa componente hidrostática (associada a uma deformação volumétrica).

Em relação ao tensor das tensões de Cauchy, a decomposição desviadora/hidrostática é dada por

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_d + \boldsymbol{\sigma}_h, \quad (2.49)$$

em que a componente hidrostática é definida por

$$\boldsymbol{\sigma}_h = p\mathbf{I}, \quad p = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I} = \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \quad (2.50)$$

onde p é a designada pressão hidrostática ou tensão média e \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem. Note-se que a componente desviadora é definida por

$$\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I}, \quad (2.51)$$

e consequentemente $\text{tr } \boldsymbol{\sigma}_d = 0$.

A decomposição desviadora/hidrostática do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff é obtida de forma trivial substituindo a Equação (2.49) na Equação (2.48) tal que

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_d + \mathbf{P}_h, \quad (2.52)$$

em que a componente hidrostática é definida por

$$\mathbf{P}_h = pJ\mathbf{F}^{-T}, \quad (2.53)$$

e a componente desviadora pode ser expressa por

$$\mathbf{P}_d = J\boldsymbol{\sigma}_d\mathbf{F}^{-T}. \quad (2.54)$$

Em alternativa, a pressão hidrostática pode ser expressa em função do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff por

$$p = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I} = \frac{1}{3} J^{-1} \mathbf{P} : \mathbf{F}. \quad (2.55)$$

Note-se que o traço de \mathbf{P}_d não é necessariamente nulo (Bonet and Wood, 2008).

2.5 Princípios fundamentais da termodinâmica

Em mecânica dos meios contínuos, independentemente do material em causa e das quantidades utilizadas para descrever o movimento, o estado de deformação e o estado tensão de um corpo, existe um conjunto de princípios fundamentais da termodinâmica que deve ser sempre satisfeito. Tais princípios são aqui apenas sucintamente postulados, sendo o leitor interessado numa descrição mais detalhada remetido para obras como Holzapfel (2000) e Bergman et al. (2011).

Para postular os princípios fundamentais da termodinâmica considere-se um corpo \mathcal{B} que ocupa uma região aberta Ω do espaço tridimensional Euclidiano \mathcal{E} com uma fronteira regular $\partial\Omega$ na sua configuração de referência. Após sofrer uma deformação $\boldsymbol{\varphi}$, o corpo \mathcal{B} passa a ocupar a região $\boldsymbol{\varphi}(\Omega)$ de fronteira $\boldsymbol{\varphi}(\partial\Omega)$. Considere-se ainda o campo vetorial das forças de volume \mathbf{b} (por unidade de volume na configuração deformada), o campo vetorial das forças de superfície aplicadas na fronteira \mathbf{t} (por unidade de área na configuração deformada) e o campo vetorial \mathbf{q} associado ao fluxo de calor. Por último considerem-se os campos escalares θ , e , s e r definidos em \mathcal{B} e que representam respetivamente o campo de temperatura, de energia interna específica, de entropia específica e de densidade de geração de calor.

2.5.1 Princípio da conservação da massa

O Princípio da Conservação da Massa pode ser matematicamente expresso na forma

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}_x \dot{\mathbf{u}} = 0, \quad (2.56)$$

em que ρ é a massa volúmica do material (por unidade de volume na configuração deformada).

2.5.2 Balanço de momentos

O axioma do balanço de momentos enuncia que ‘*Para qualquer parte \mathcal{P} do corpo \mathcal{B} na sua configuração deformada, de fronteira \mathcal{S} , o balanço de momento linear*

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) \, da + \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{b} \, dv = \int_{\mathcal{P}} \rho \ddot{\mathbf{u}} \, dv, \quad (2.57)$$

e o balanço de momento angular

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) \, da + \int_{\mathcal{P}} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} \, dv = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{x} \times \rho \ddot{\mathbf{u}} \, dv, \quad (2.58)$$

são satisfeitos’ (de Souza Neto et al., 2008). Enquanto o balanço de momento angular resulta na simetria do tensor das tensões de Cauchy ($\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$), o balanço de momento

linear permite escrever a seguinte equação diferencial de derivadas parciais com condições de fronteira definidas pelo teorema de Cauchy

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, & \text{em } \varphi(\Omega), \\ \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, & \text{em } \varphi(\partial\Omega), \end{cases} \quad (2.59)$$

em que \mathbf{n} é o versor normal à superfície de fronteira da configuração deformada de \mathcal{B} . A primeira equação designa-se por equação do movimento de Cauchy e o conjunto de equações define a forma forte, pontual ou local das equações de equilíbrio. Note-se que as equações apresentadas se encontram formuladas na descrição espacial, já que as diversas quantidades envolvidas se encontram definidas na configuração deformada do corpo \mathcal{B} .

Considerando em alternativa a formulação material da forma forte das equações de equilíbrio, estas podem ser reescritas em termos do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff como

$$\begin{cases} \operatorname{div}_X \mathbf{P} + \bar{\mathbf{b}} = \bar{\rho} \ddot{\mathbf{u}}, & \text{em } \Omega, \\ \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{P} \mathbf{m}, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.60)$$

em que \mathbf{m} é o versor normal à superfície de fronteira da configuração de referência de \mathcal{B} e as quantidades $(\bar{\cdot})$ são definidas na configuração de referência do corpo \mathcal{B} . Em particular, o campo vetorial de referência das forças de volume $\bar{\mathbf{b}}$ (por unidade de volume na configuração de referência) e a massa volúmica de referência $\bar{\rho}$ (por unidade de volume na configuração de referência) podem ser obtidas pelas expressões

$$\bar{\mathbf{b}} = J \mathbf{b}, \quad \bar{\rho} = J \rho. \quad (2.61)$$

2.5.3 Primeira lei da termodinâmica

A primeira lei da termodinâmica postula o princípio da conservação da energia e pode ser expressa matematicamente na forma

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \rho r - \operatorname{div}_x \mathbf{q}, \quad (2.62)$$

em que o termo $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$ representa a potência de tensão por unidade de volume na configuração deformada do corpo \mathcal{B} . O tensor \mathbf{D} designa-se por tensor de taxa de deformação e é definido por

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}_{\text{sim}}, \quad (2.63)$$

em que \mathbf{L} é o gradiente de velocidade obtido de forma trivial em função do gradiente de deformação por

$$\mathbf{L} = \nabla_x \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}} \right) \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.64)$$

2.5.4 Segunda lei da termodinâmica

A segunda lei da termodinâmica postula o princípio da irreversibilidade da criação de entropia e pode ser expressa matematicamente pela inequação

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div}_x \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) - \frac{\rho r}{\theta} \geq 0. \quad (2.65)$$

2.5.5 Desigualdade de Clausius-Duhem

Através da combinação da primeira e segunda leis da termodinâmica é possível escrever

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div}_x \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) - \frac{1}{\theta} (\rho \dot{e} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \operatorname{div}_x \mathbf{q}) \geq 0. \quad (2.66)$$

Introduzindo o conceito de energia livre específica ψ definida por

$$\psi = e - \theta s, \quad (2.67)$$

e tomando a identidade algébrica

$$\operatorname{div}_x \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) = \frac{1}{\theta} \operatorname{div}_x \mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla_x \theta, \quad (2.68)$$

a Inequação (2.66) pode ser reescrita, dando origem à desigualdade de Clausius-Duhem, que é expressa na sua forma espacial por

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_x \theta \geq 0, \quad (2.69)$$

em que o membro do lado esquerdo representa a dissipação de energia por unidade de volume na configuração deformada do corpo \mathcal{B} . Em alternativa, a desigualdade de Clausius-Duhem pode ser expressa na sua forma material por

$$J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \bar{\rho}(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) - \frac{J}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_X \theta \geq 0, \quad (2.70)$$

em que agora o membro do lado esquerdo representa a dissipação de energia por unidade de volume na configuração de referência do corpo \mathcal{B} .

2.6 Forma fraca das equações de equilíbrio

A forma forte, pontual ou local das equações de equilíbrio (ver Equações (2.59) e (2.60)) impõe que as condições de equilíbrio sejam satisfeitas em todos os pontos do corpo e requer a continuidade das variáveis primárias de campo, neste caso os deslocamentos u , v e w . Quaisquer que sejam as funções que definem u , v e w , estas devem ser diferenciáveis até à ordem das derivadas parciais existentes na forma forte das equações de equilíbrio (Quek and Liu, 2003). Obter a solução exata da forma forte das equações de equilíbrio é em geral bastante complexo e impraticável para os problemas estruturais comuns encontrados em engenharia. Por este motivo, muitos dos métodos numéricos existentes que permitem obter soluções aproximadas para estes problemas são formulados com base na discretização da designada forma fraca, global ou integral das equações governativas de equilíbrio. Esta consiste numa relaxação da forma forte na medida em que não garante que as equações de equilíbrio sejam satisfeitas em todos os pontos do corpo, mas sim satisfeitas em termos médios como resultado da integração sobre o volume do sólido.

A forma fraca das equações de equilíbrio pode ser deduzida por diversos métodos, os quais podem ser agrupados de forma geral em métodos energéticos (Princípio de Hamilton, Princípio da Energia Potencial Mínima, Princípio dos Trabalhos Virtuais, ...) e métodos de resíduos pesados (Método dos Resíduos Pesados de Galerkin, ...). Na presente dissertação optou-se pela utilização do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

2.6.1 Princípio dos Trabalhos Virtuais

Considere-se um corpo \mathcal{B} que ocupa uma região aberta Ω do espaço tridimensional Euclidiano \mathcal{E} com uma fronteira regular $\partial\Omega$ na sua configuração de referência. Na configuração deformada, \mathcal{B} ocupa a região $\varphi(\Omega)$ com fronteira $\varphi(\partial\Omega)$ definida pela deformação φ .

Descrição espacial

A formulação espacial do Princípio dos Trabalhos Virtuais enuncia que o corpo \mathcal{B} está em equilíbrio se e só se

$$\int_{\varphi(\Omega)} [\boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\eta} - (\mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\eta}] dv - \int_{\varphi(\partial\Omega)} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta} da = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (2.71)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor das tensões de Cauchy e \mathbf{b} e \mathbf{t} são respetivamente as forças de volume por unidade de volume na configuração deformada e as forças de tração de fronteira por unidade de área da fronteira na configuração deformada. O espaço \mathcal{V} é o espaço dos deslocamentos virtuais de \mathcal{B} , definido pelo espaço de deslocamentos arbitrários suficientemente regulares

$$\boldsymbol{\eta} : \varphi(\Omega) \rightarrow \mathcal{U},$$

em que \mathcal{U} é o espaço de vetores de dimensão n associado a \mathcal{E} .

Descrição material

De modo equivalente, a formulação material do Princípio dos Trabalhos Virtuais enuncia que o corpo \mathcal{B} está em equilíbrio se e só se

$$\int_{\Omega} [\mathbf{P} : \nabla_p \boldsymbol{\eta} - (\bar{\mathbf{b}} - \bar{\rho} \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\eta}] dv - \int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} da = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (2.72)$$

em que \mathbf{P} é o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff e $\bar{\mathbf{b}}$ e $\bar{\mathbf{t}}$ são respetivamente as forças de volume por unidade de volume na configuração de referência e as forças de tração de fronteira por unidade de área da fronteira na configuração de referência. Neste caso, o espaço \mathcal{V} é o espaço dos deslocamentos virtuais de \mathcal{B} , definido pelo espaço de deslocamentos arbitrários suficientemente regulares

$$\boldsymbol{\eta} : \Omega \rightarrow \mathcal{U}.$$

A formulação material do Princípio dos Trabalhos Virtuais pode ser obtida a partir da formulação espacial através das identidades

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{P} \mathbf{F}^T, \quad \nabla_x \mathbf{a} = \nabla_X \mathbf{a} \mathbf{F}^{-1}, \quad (2.73)$$

em que \mathbf{a} é um campo vetorial genérico, e da relação

$$\int_{\varphi(\Omega)} a(\mathbf{x}) dv = \int_{\Omega} J(\mathbf{X}) a(\varphi(\mathbf{X})) dv, \quad (2.74)$$

válida para qualquer campo escalar a .

Formulação quasi-estática

Nas análises realizadas no âmbito desta dissertação considera-se que a aplicação do carregamento é realizada de forma lenta. Neste caso, os efeitos de inércia do corpo podem ser desprezados e teremos uma formulação quasi-estática do problema em causa.

Desprezando os termos de inércia, a formulação espacial do Princípio dos Trabalhos Virtuais pode ser reescrita de forma simplificada como

$$\int_{\varphi(\Omega)} [\boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\eta} - \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}] dv - \int_{\varphi(\partial\Omega)} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta} da = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (2.75)$$

e analogamente a formulação material como

$$\int_{\Omega} [\mathbf{P} : \nabla_X \boldsymbol{\eta} - \bar{\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\eta}] dv - \int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} da = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}. \quad (2.76)$$

2.7 Problema mecânico de valor de fronteira inicial

2.7.1 Modelo constitutivo baseado em variáveis internas

Os princípios fundamentais da termodinâmica enunciados no Subcapítulo 2.5 são válidos e devem ser satisfeitos por qualquer corpo contínuo, independentemente do material de que é constituído. Subjacente à distinção do comportamento de diferentes tipos de materiais, encontra-se o desenvolvimento de modelos constitutivos (de Souza Neto et al., 2008). No contexto da mecânica dos meios contínuos, um modelo constitutivo é definido por um conjunto de equações, designadas por equações constitutivas, que estabelecem a relação entre tensões e deformações para um determinado material. Convém notar que um modelo constitutivo não é mais do que um modelo matemático que permite descrever de forma simplificada o comportamento real complexo de um material, nunca devendo este ser tomado como uma descrição exata da realidade. Na verdade, um modelo constitutivo deve ser desenvolvido tendo em conta não só o material que se pretende analisar, mas também o tipo de fenómenos que se pretendem estudar e que serão relevantes no comportamento do material face às condições de solicitação.

No contexto da mecânica dos meios contínuos, qualquer modelo constitutivo deve satisfazer três axiomas fundamentais, designados por axiomas constitutivos, que são sucintamente descritos de seguida. Para que estes sejam enunciados de forma conveniente, é importante definir um processo termocinético de \mathcal{B} como um par de campos

$$\{\varphi(\mathbf{X}, t), \theta(\mathbf{X}, t)\}, \quad (2.77)$$

e um processo termodinâmico de \mathcal{B} como um conjunto de campos que satisfazem o balanço de momento e as leis fundamentais da termodinâmica dado por

$$\{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t), e(\mathbf{X}, t), s(\mathbf{X}, t), r(\mathbf{X}, t), \mathbf{b}(\mathbf{X}, t), \mathbf{q}(\mathbf{X}, t)\}. \quad (2.78)$$

O significado das diferentes variáveis encontradas nas expressões anteriores foi previamente indicado no Subcapítulo 2.5.

Princípio do determinismo compatível termodinâmico

O princípio do determinismo compatível termodinâmico postula que o histórico do processo termocinético a que a vizinhança de um ponto \mathbf{X} de \mathcal{B} foi sujeito determina o processo termodinâmico do ponto \mathbf{X} de \mathcal{B} . Em particular, no que diz respeito aos designados materiais simples, o histórico local de \mathbf{F} , θ e \mathbf{g}^2 é suficiente para determinar o histórico do processo termodinâmico. Neste sentido, o princípio do determinismo compatível termodinâmico implica que (de Souza Neto et al., 2008):

1. A desigualdade de Clausius-Duhem é satisfeita para qualquer processo termocinético de \mathcal{B} ;
2. Para um determinado ponto \mathbf{X} de \mathcal{B} existe um conjunto de funcionais \mathfrak{F} , \mathfrak{G} , \mathfrak{H} e \mathfrak{J} dos históricos de \mathbf{F} , θ e \mathbf{g} tal que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(t) &= \mathfrak{F}(\mathbf{F}^t, \theta^t, \mathbf{g}^t), \\ \psi(t) &= \mathfrak{G}(\mathbf{F}^t, \theta^t, \mathbf{g}^t), \\ s(t) &= \mathfrak{H}(\mathbf{F}^t, \theta^t, \mathbf{g}^t), \\ \mathbf{q}(t) &= \mathfrak{J}(\mathbf{F}^t, \theta^t, \mathbf{g}^t),\end{aligned}\tag{2.79}$$

em que $(\cdot)^t$ denota o histórico de (\cdot) em \mathbf{X} até ao instante t .

Princípio da objetividade material

O princípio da objetividade material (ou da independência de referencial) postula que a resposta do material deve ser independente do observador. O movimento $\boldsymbol{\varphi}^*$ relaciona-se com o movimento $\boldsymbol{\varphi}$ devido a uma mudança do observador se puder ser expresso por

$$\boldsymbol{\varphi}^*(\mathbf{X}, t) = \mathbf{y}(t) + \mathbf{Q}(t) [\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}_0], \tag{2.80}$$

em que $\mathbf{y}(t)$ é um ponto do espaço, $\mathbf{Q}(t)$ é um tensor de rotação e $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p}, t) - \mathbf{x}_0$ é o vetor de posição de $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$ em relação à origem arbitrária \mathbf{x}_0 . A relação expressa pela equação acima traduz um movimento relativo de corpo rígido entre diferentes observadores, o qual não deve ter qualquer influência nas equações constitutivas do modelo. Formalmente este princípio impõe restrições sobre os funcionais definidos em (2.79) tal que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^*(t) &= \mathfrak{F}(\mathbf{F}^{t*}, \theta^t, \mathbf{g}^{t*}), \\ \psi(t) &= \mathfrak{G}(\mathbf{F}^{t*}, \theta^t, \mathbf{g}^{t*}), \\ s(t) &= \mathfrak{H}(\mathbf{F}^{t*}, \theta^t, \mathbf{g}^{t*}), \\ \mathbf{q}^*(t) &= \mathfrak{J}(\mathbf{F}^{t*}, \theta^t, \mathbf{g}^{t*}),\end{aligned}\tag{2.81}$$

tendo em atenção que campos escalares não sofrem alterações devido à mudança de observador e que os campos vetoriais e tensoriais sofrem respetivamente transformações do tipo $(\cdot)^* = \mathbf{Q}(\cdot)$ e $(\cdot)^* = \mathbf{Q}(\cdot)\mathbf{Q}^T$ (de Souza Neto et al., 2008).

²Por uma questão de simplificação de notação é considerado que $\mathbf{g} \equiv \nabla_x \theta$.

Restrições de simetria do material

O grupo de simetria de um material sólido consiste num subconjunto do grupo de tensores ortogonais próprios \mathcal{O}^+ , i.e. um conjunto de rotações da configuração de referência no qual os funcionais de resposta do material se mantêm inalterados. Formalmente, um subconjunto \mathcal{S} de \mathcal{O}^+ é um grupo de simetria do material se as relações

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(\mathbf{F}^t, \theta^t, \mathbf{g}^t) &= \mathfrak{F}([\mathbf{FQ}]^t, \theta^t, \mathbf{g}^t) \\ \mathfrak{G}(\mathbf{F}^t, \theta^t, \mathbf{g}^t) &= \mathfrak{G}([\mathbf{FQ}]^t, \theta^t, \mathbf{g}^t) \\ \mathfrak{H}(\mathbf{F}^t, \theta^t, \mathbf{g}^t) &= \mathfrak{H}([\mathbf{FQ}]^t, \theta^t, \mathbf{g}^t) \\ \mathfrak{J}(\mathbf{F}^t, \theta^t, \mathbf{g}^t) &= \mathfrak{J}([\mathbf{FQ}]^t, \theta^t, \mathbf{g}^t),\end{aligned}\tag{2.82}$$

forem válidas para qualquer rotação independente do tempo $\mathbf{Q} \in \mathcal{S}$ (de Souza Neto et al., 2008). De facto a definição de isotropia de um sólido decorre diretamente do conjunto de restrições apresentado em cima. Um sólido é dito de isotrópico se o grupo de simetria que o caracteriza coincide com o grupo de tensores ortogonais de referência, i.e. $\mathcal{S} \equiv \mathcal{O}^+$, o que do ponto de vista físico significa que a resposta do material é idêntica em todas as direções ou, formalmente, para todas as rotações possíveis da configuração de referência escolhida.

As equações constitutivas (2.79) descrevem uma teoria constitutiva geral baseada num conjunto de funcionais do histórico de \mathbf{F} , θ e \mathbf{g} . No entanto, embora do ponto de vista formal e teórico esta formulação seja fundamental, do ponto de vista prático não tem aplicabilidade devido à sua generalidade. Os modelos constitutivos baseados em variáveis internas podem ser vistos como um caso particular da teoria constitutiva geral e na sua essência redefinem o histórico do processo termocinético em termos de um número finito de parâmetros, as variáveis de estado, permitindo desta forma o desenvolvimento de modelos constitutivos aplicáveis. Estes modelos inserem-se na designada termodinâmica com variáveis internas, a qual tem por base duas hipóteses fundamentais:

1. Em qualquer instante de um processo termocinético, o estado termodinâmico (definido por $\boldsymbol{\sigma}$, ψ , s e \mathbf{q}) num determinado ponto \mathbf{X} pode ser completamente definido através do conhecimento de um conjunto finito de variáveis de estado;
2. O estado termodinâmico num determinado ponto \mathbf{X} depende exclusivamente dos valores instantâneos das variáveis de estado e não do seu histórico.

No contexto da mecânica dos meios contínuos, pode assumir-se que em qualquer instante t , o estado termodinâmico num determinado ponto \mathbf{X} pode ser definido pelos valores instantâneos de um conjunto de quatro variáveis de estado

$$\{\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}\},\tag{2.83}$$

em que $\boldsymbol{\alpha}$ é definido como

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_k\},\tag{2.84}$$

e consiste num conjunto de variáveis internas α_k (de natureza escalar e tensorial) associadas aos mecanismos dissipativos. Verifica-se portanto que as variáveis internas contidas em $\boldsymbol{\alpha}$ serão responsáveis por conter toda a informação relevante do histórico do material até ao

instante t e que esta formulação se mantém totalmente geral em relação ao material em causa. O sucesso do modelo constitutivo na descrição do seu comportamento dependerá em larga escala da escolha de um conjunto apropriado de variáveis internas.

Caso se pretenda desenvolver um modelo constitutivo puramente mecânico, podem ser ignorados os termos e as variáveis internas relacionadas com o domínio térmico. Deste modo, o modelo pode ser definido pelo seguinte conjunto de equações constitutivas mecânicas³

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T, \quad (2.85)$$

$$\psi = \psi(\mathbf{F}, \boldsymbol{\alpha}), \quad (2.86)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = f(\mathbf{F}, \boldsymbol{\alpha}). \quad (2.87)$$

2.7.2 Problema mecânico de valor de fronteira inicial

O problema constitutivo geral reduz-se neste caso ao designado problema mecânico fundamental de valor inicial:

Conhecidos os valores iniciais das variáveis internas $\boldsymbol{\alpha}(t_0)$ e o histórico do gradiente de deformação

$$\mathbf{F}(t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (2.88)$$

encontrem-se as funções $\boldsymbol{\sigma}(t)$ e $\boldsymbol{\alpha}(t)$ para o tensor das tensões de Cauchy e para o conjunto de variáveis internas tal que as equações constitutivas

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = f(\mathbf{F}(t), \boldsymbol{\alpha}(t)) \end{cases} \quad (2.89)$$

sejam satisfeitas em qualquer instante $t \in [t_0, t_f]$.

2.7.3 Forma fraca do problema mecânico de valor de fronteira inicial

Com base na forma fraca das equações de equilíbrio deduzida pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais no Subcapítulo 2.6, é agora possível estabelecer a forma fraca do problema mecânico quasi-estático de valor de fronteira inicial que será posteriormente discretizada e resolvida pelo Método dos Elementos Finitos. Para tal considere-se um corpo \mathcal{B} que ocupa uma região aberta Ω do espaço tridimensional Euclidiano \mathcal{E} com uma fronteira regular $\partial\Omega$ na sua configuração de referência. Na configuração deformada, \mathcal{B} ocupa a região $\varphi(\Omega)$ com fronteira $\varphi(\partial\Omega)$ definida pela deformação φ (ver Figura 2.9). Adicionalmente, considere-se que o corpo \mathcal{B} é constituído por um material genérico modelado pelas equações constitutivas (2.85), (2.86) e (2.87) e que o campo de variáveis internas $\boldsymbol{\alpha}$ é conhecido no instante inicial t_0 .

³O desenvolvimento subjacente a este conjunto de equações constitutivas baseia-se essencialmente na desigualdade de Clausius-Duhem e por uma questão de brevidade não será aqui apresentado.

Admita-se que o corpo \mathcal{B} está sujeito a um histórico de forças de volume

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (2.90)$$

e que são impostas as seguintes condições de fronteira:

- *Condição de fronteira natural.* O histórico das forças de tração de superfície

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (2.91)$$

está prescrito na parte da fronteira de \mathcal{B} que ocupa a região $\partial\Omega_s$ na configuração de referência;

- *Condição de fronteira essencial.* O movimento é uma função prescrita na parte da fronteira de \mathcal{B} que ocupa a região $\partial\Omega_u$ ⁴ na configuração de referência

$$\bar{\varphi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t), \quad t \in [t_0, T], \quad \mathbf{X} \in \partial\Omega_u, \quad (2.92)$$

em que $\bar{\mathbf{u}}$ é o campo de deslocamentos de fronteira prescrito correspondente. O conjunto de deslocamentos cinematicamente admissíveis de \mathcal{B} é definido pelo conjunto de todos os campos de deslocamentos suficientemente regulares que satisfazem a condição de fronteira essencial (restrição cinemática)

$$\mathcal{K} = \{ \mathbf{u} : \Omega \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{U} \mid \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t), \quad t \in [t_0, T], \quad \mathbf{X} \in \partial\Omega_u \}. \quad (2.93)$$

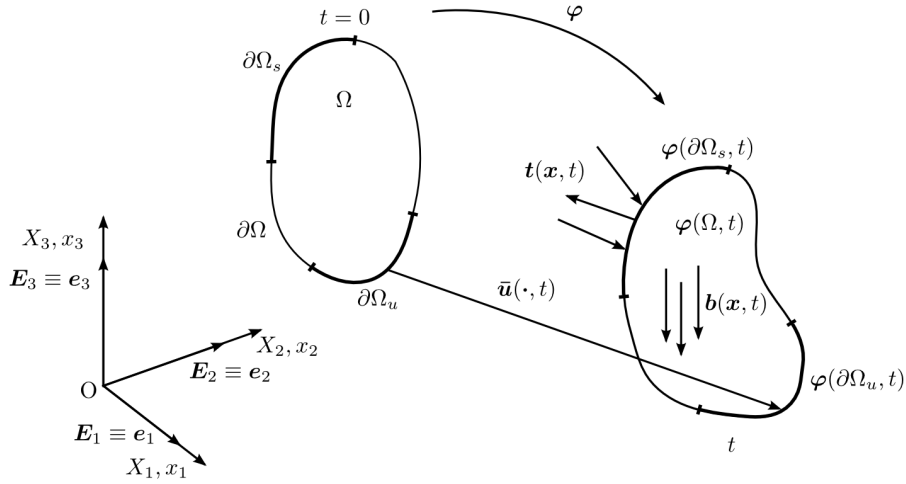


Figura 2.9: Representação esquemática do problema mecânico quasi-estático de valor de fronteira inicial.

⁴Por simplicidade será assumido que $\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_s = \emptyset$.

O problema mecânico quasi-estático de valor de fronteira inicial pode então ser estabelecido na sua formulação espacial como (de Souza Neto et al., 2008):

Encontre-se o campo de deslocamentos cinematicamente admissível, $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$, tal que, para qualquer instante $t \in [t_0, t_f]$, seja satisfeita a forma fraca das equações de equilíbrio deduzida pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais

$$\int_{\varphi(\Omega, t)} [\boldsymbol{\sigma}(t) : \nabla_x \boldsymbol{\eta} - \mathbf{b}(t) \cdot \boldsymbol{\eta}] \, dv - \int_{\varphi(\partial\Omega_s, t)} \mathbf{t}(t) \cdot \boldsymbol{\eta} \, da = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_t, \quad (2.94)$$

em que o espaço de deslocamentos virtuais no instante t é definido por

$$\mathcal{V}_t = \{ \boldsymbol{\eta} : \varphi(\Omega, t) \rightarrow \mathcal{U} \mid \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \text{ em } \varphi(\partial\Omega_u, t) \}. \quad (2.95)$$

Em cada ponto de \mathcal{B} , o tensor das tensões de Cauchy é dado por

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \frac{1}{J(t)} \mathbf{P}(t) \mathbf{F}(t)^T, \quad (2.96)$$

em que $\mathbf{P}(t)$ é a solução do problema mecânico fundamental de valor inicial com um gradiente de deformação prescrito

$$\mathbf{F}(t) = \nabla_X \varphi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{I} + \nabla_X \mathbf{u}(\mathbf{X}, t). \quad (2.97)$$

De modo equivalente, o problema mecânico quasi-estático de valor de fronteira inicial pode ser estabelecido na sua formulação material como:

Encontre-se o campo de deslocamentos cinematicamente admissível, $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$, tal que, para qualquer instante $t \in [t_0, t_f]$, seja satisfeita a forma fraca das equações de equilíbrio deduzida pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais

$$\int_{\Omega} [\mathbf{P}(t) : \nabla_X \boldsymbol{\eta} - \bar{\mathbf{b}}(t) \cdot \boldsymbol{\eta}] \, dv - \int_{\partial\Omega_s} \bar{\mathbf{t}}(t) \cdot \boldsymbol{\eta} \, da = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (2.98)$$

em que o espaço de deslocamentos virtuais é definido por

$$\mathcal{V} = \{ \boldsymbol{\eta} : \Omega \rightarrow \mathcal{U} \mid \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \text{ em } \partial\Omega_s \}. \quad (2.99)$$

e o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff, $\mathbf{P}(t)$, é a solução do problema mecânico fundamental de valor inicial com um gradiente de deformação prescrito

$$\mathbf{F}(t) = \nabla_X \varphi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{I} + \nabla_X \mathbf{u}(\mathbf{X}, t). \quad (2.100)$$

Página intencionalmente deixada em branco

Capítulo 3

Método dos Elementos Finitos

3.1 Introdução

A forma fraca do problema mecânico quasi-estático de valor de fronteira inicial estabelecida no capítulo anterior apresenta ainda um grau de complexidade elevado. A obtenção de uma solução puramente analítica para corpos de geometria complexa e constituídos por materiais cujo comportamento é governado por modelos constitutivos complexos é na prática bastante difícil ou mesmo impossível. Por este motivo, diversos métodos numéricos são formulados com base na discretização da forma fraca das equações de equilíbrio e permitem obter uma solução aproximada do problema através da resolução de um sistema de equações discretizado. Entre os diversos métodos existentes, o Método dos Elementos Finitos é por excelência o mais utilizado, quer pela comunidade científica quer a nível industrial, para resolver problemas de engenharia no domínio da mecânica dos sólidos e estrutural. Este método permite lidar com um grande leque de modelos envolvendo geometrias e condições de fronteira de elevada complexidade e obter soluções aproximadas com a precisão adequada no contexto da aplicação em causa.

Neste capítulo são descritos os aspetos essenciais da aplicação do Método dos Elementos Finitos na resolução de um problema mecânico quasi-estático não-linear de valor de fronteira inicial. Os conteúdos apresentados neste capítulo são essencialmente baseados na obra de Souza Neto et al. (2008) e, para uma melhor compreensão e descrição mais detalhada sobre este método, sugerem-se algumas obras como os livros de Owen and Hinton (1986), Oñate (2010), Zienkiewicz et al. (2013) e Zienkiewicz et al. (2014). Na Figura 3.1 encontra-se uma representação esquemática das diferentes etapas percorridas desde a formulação integral do problema até ao estabelecimento e resolução do sistema de equações incrementais de elementos finitos.

O problema mecânico quasi-estático de valor de fronteira inicial é definido no Subcapítulo 2.7 e a sua formulação integral ou forma fraca foi seguidamente deduzida pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais. Nos subcapítulos que se seguem são descritos os principais aspetos relacionados com cada uma das restantes etapas indicadas na Figura 3.1.

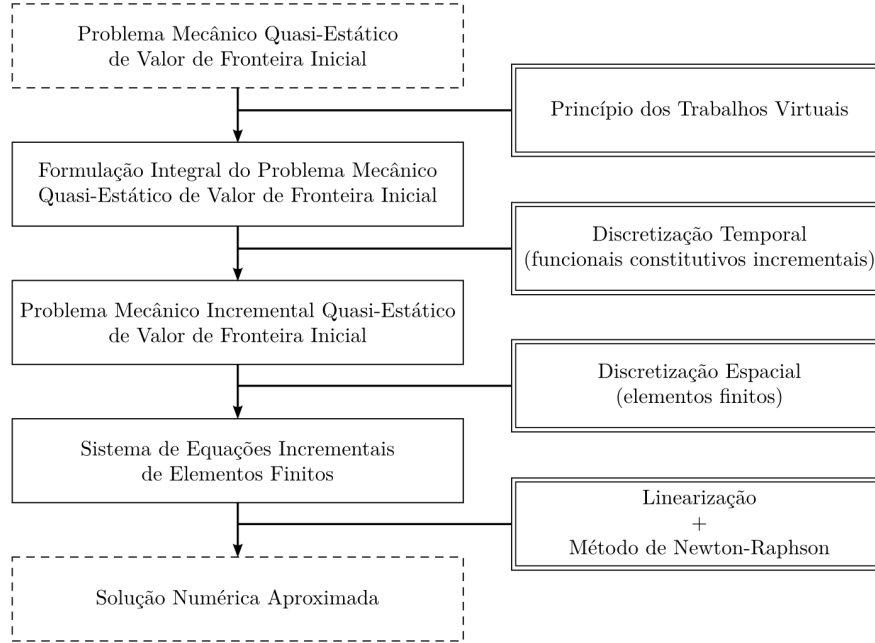


Figura 3.1: Representação esquemática das diferentes etapas percorridas na aplicação do Método dos Elementos Finitos a um problema mecânico quasi-estático não-linear de valor de fronteira inicial.

3.2 Discretização temporal

Muitos dos materiais estruturais encontrados em engenharia apresentam um comportamento que depende da trajetória e/ou da taxa de deformação. Por este motivo, o desenvolvimento de modelos constitutivos para caracterizar estes materiais envolvem equações constitutivas que dependem do histórico de deformação. Para lidar com tais modelos, a solução do problema pelo Método dos Elementos Finitos requer necessariamente a adoção de um algoritmo numérico de integração das equações constitutivas no tempo. A escolha adequada de tal algoritmo será naturalmente dependente das características do modelo e também do tipo de problema em causa. Geralmente, a integração numérica das equações constitutivas envolve uma discretização temporal do intervalo de tempo total $[t_0, t_f]$ em n subintervalos e admite uma determinada hipótese de evolução da trajetória de deformação entre subintervalos de tempo adjacentes.

No caso de um problema mecânico de valor de fronteira inicial, considerando o incremento temporal genérico $[t_n, t_{n+1}]$ e conhecido o conjunto de variáveis internas α_n no instante t_n , é imposto que o algoritmo de integração numérica das equações constitutivas do modelo defina de forma única o tensor das tensões de Cauchy σ a partir do gradiente de deformação F_{n+1} prescrito no instante t_{n+1} . Tal condição pode ser interpretada como a restrição numérica correspondente ao princípio do determinismo termodinâmico compatível. Para que esta condição seja satisfeita, o algoritmo de integração numérica deve definir um

funcional constitutivo incremental aproximado $\hat{\sigma}$ expresso de forma geral por

$$\sigma_{n+1} = \hat{\sigma}(\alpha_n, F_{n+1}), \quad (3.1)$$

em que σ_{n+1} deve convergir para a solução exata com a diminuição dos incrementos do gradiente de deformação. A lei constitutiva numérica definida por $\hat{\sigma}$ é geralmente não-linear e é independente do histórico em cada incremento de tempo, i.e. σ_{n+1} é apenas função do gradiente de deformação F_{n+1} . O argumento α_n é pois constante no incremento temporal $[t_n, t_{n+1}]$, sendo também definido um funcional constitutivo incremental que atualiza as variáveis internas do problema expresso de forma geral por

$$\alpha_{n+1} = \hat{\alpha}(\alpha_n, F_{n+1}). \quad (3.2)$$

Note-se que também pode ser definido um funcional constitutivo incremental de modo equivalente para o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff como

$$P_{n+1} = \hat{P}(\alpha_n, F_{n+1}). \quad (3.3)$$

Considerando uma formulação espacial, a introdução do funcional constitutivo incremental (3.1) na forma fraca do problema mecânico quasi-estático de valor de fronteira inicial (ver Equação (2.94), página 29) permite definir o problema mecânico incremental quasi-estático de valor de fronteira inicial:

Conhecido o campo de variáveis internas α_n no instante t_n e conhecidos os campos vetoriais das forças de volume \mathbf{b}_{n+1} e de tração de superfície \mathbf{t}_{n+1} no instante t_{n+1} , encontre-se a configuração cinematicamente admissível $\varphi_{n+1}(\Omega) \in \mathcal{K}_{n+1}$ tal que a forma fraca das equações de equilíbrio deduzida pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais

$$\int_{\varphi_{n+1}(\Omega)} [\hat{\sigma}(\alpha_n, F_{n+1}) : \nabla_x^s \boldsymbol{\eta} - \mathbf{b}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta}] dv - \int_{\varphi_{n+1}(\partial\Omega_s)} \mathbf{t}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta} da = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_t, \quad (3.4)$$

é satisfeita para qualquer $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}$, em que φ_{n+1} é a configuração deformada no instante t_{n+1}

$$\mathbf{x}_{n+1} = \varphi_{n+1}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{X}), \quad (3.5)$$

e F_{n+1} o gradiente de deformação no mesmo instante

$$F_{n+1} = \nabla_X \varphi_{n+1} = \mathbf{I} + \nabla_X \mathbf{u}_{n+1}. \quad (3.6)$$

O conjunto de deslocamentos cinematicamente admissíveis \mathcal{K}_{n+1} no instante t_{n+1} é definido por

$$\mathcal{K}_{n+1} = \left\{ \mathbf{u} : \Omega \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{U} \mid \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{X}, t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad \mathbf{X} \in \partial\Omega_u \right\}, \quad (3.7)$$

em que $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}$ é o campo de deslocamentos de fronteira prescrito no instante t_{n+1} .

De modo equivalente, a introdução do funcional constitutivo incremental (3.3) na forma fraca do problema mecânico quasi-estático de valor de fronteira inicial (ver Equação (2.98), página 29) permite definir segundo uma formulação material:

Conhecido o campo de variáveis internas α_n no instante t_n e conhecidos os campos vetoriais das forças de volume $\bar{\mathbf{b}}_{n+1}$ e de tração de superfície $\bar{\mathbf{t}}_{n+1}$ no instante t_{n+1} , encontre-se a configuração cinematicamente admissível $\varphi_{n+1}(\Omega) \in \mathcal{K}_{n+1}$ tal que a forma fraca de equilíbrio deduzida pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais

$$\int_{\Omega} \left[\hat{\mathbf{P}}(\alpha_n, \mathbf{F}_{n+1}) : \nabla_X^s \boldsymbol{\eta} - \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta} \right] dv - \int_{\partial\Omega_s} \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta} da = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_t, \quad (3.8)$$

é satisfeita para qualquer $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}$, em que φ_{n+1} é a configuração deformada no instante t_{n+1}

$$\mathbf{x}_{n+1} = \varphi_{n+1}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{X}), \quad (3.9)$$

e \mathbf{F}_{n+1} o gradiente de deformação no mesmo instante

$$\mathbf{F}_{n+1} = \nabla_X \varphi_{n+1} = \mathbf{I} + \nabla_X \mathbf{u}_{n+1}. \quad (3.10)$$

O conjunto de deslocamentos cinematicamente admissíveis \mathcal{K}_{n+1} no instante t_{n+1} é definido por

$$\mathcal{K}_{n+1} = \left\{ \mathbf{u} : \Omega \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{U} \mid \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{X}, t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad \mathbf{X} \in \partial\Omega_u \right\}, \quad (3.11)$$

em que $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}$ é o campo de deslocamentos de fronteira prescrito no instante t_{n+1} .

3.3 Discretização espacial

Um dos aspetos fundamentais do Método dos Elementos Finitos consiste na subdivisão ou discretização h do domínio contínuo Ω do problema num conjunto finito de n_{elem} subdomínios designados por elementos finitos, $\Omega^{(e)}$. O domínio discretizado, ${}^h\Omega$, consiste assim numa aproximação do domínio contínuo e pode ser expresso por

$$\Omega \approx {}^h\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \Omega^{(e)}. \quad (3.12)$$

Também o conjunto de deslocamentos cinematicamente admissíveis \mathcal{K} e o espaço de deslocamentos virtuais \mathcal{V} irão tomar respetivamente as suas formas discretizadas ${}^h\mathcal{K}$ e ${}^h\mathcal{V}$, o que será fundamental para a discretização das equações de equilíbrio estabelecidas pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais.

3.3.1 Funções de interpolação

Considere-se um elemento finito genérico e definido por $n_{\text{nós}}$ nós e no qual a cada ponto nodal i de coordenadas \mathbf{x}^i se encontra associada uma função de interpolação $N_i^{(e)}(\mathbf{x})$. As funções de interpolação no interior do domínio do elemento, $\Omega^{(e)}$, tomam a designação de funções de forma e são definidas pelo tipo de elemento finito utilizado. Independentemente deste aspeto, qualquer função de forma $N_i^{(e)}(\mathbf{x})$ satisfaz a propriedade de delta de Kronecker

$$N_i^{(e)}(\mathbf{x}^j) = \delta_{ij}, \quad (3.13)$$

em que δ_{ij} é a função delta de Kronecker definida por

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{se } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (3.14)$$

Considere-se um campo genérico $a(\mathbf{x})$ definido no domínio $\Omega^{(e)}$ do elemento. A interpolação $^h a$ do campo a em qualquer ponto \mathbf{x} do interior do elemento e é definida através das funções de forma por

$$a(\mathbf{x}) \approx ^h a(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^{n_{\text{nós}}} a(\mathbf{x}^i) N_i^{(e)}(\mathbf{x}). \quad (3.15)$$

Supondo agora que $a(\mathbf{x})$ é definido no domínio global Ω , a interpolação $^h a$ será definida de modo semelhante por

$$a(\mathbf{x}) \approx ^h a(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^{n_{\text{pontos}}} a(\mathbf{x}^i) N_i^g(\mathbf{x}), \quad (3.16)$$

em que n_{pontos} é o número total de pontos nodais da malha de elementos finitos e $N_i^g(\mathbf{x})$ é a designada função de forma global associada ao nó global i , a qual satisfaz igualmente a propriedade de delta de Kronecker.

3.3.2 Discretização de espaços, matriz de interpolação e operadores gradiente discretos

Como foi referido, a primeira etapa necessária para a discretização espacial das equações de equilíbrio estabelecidas pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais consiste na discretização de \mathcal{K} e de \mathcal{V} . Tendo em conta as funções de interpolação introduzidas anteriormente, $^h \mathcal{K}$ e $^h \mathcal{V}$ poderão então ser definidos por

$$^h \mathcal{K} \equiv \left\{ ^h \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{\text{pontos}}} \mathbf{u}(\mathbf{x}^i) N_i^g(\mathbf{x}) \mid \mathbf{u}(\mathbf{x}^i) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^i) \text{ se } \mathbf{x}^i \in \partial\Omega_u \right\}, \quad (3.17)$$

$$^h \mathcal{V} \equiv \left\{ ^h \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{\text{pontos}}} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}^i) N_i^g(\mathbf{x}) \mid \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}^i) = \mathbf{0} \text{ se } \mathbf{x}^i \in \partial\Omega_u \right\}. \quad (3.18)$$

É ainda conveniente introduzir algumas entidades matriciais utilizadas com frequência na formulação pelo Método dos Elementos Finitos. Considere-se que n_{dim} é o número de graus de liberdade do problema. Em primeiro lugar, as funções de forma globais podem ser agrupadas de forma matricial na designada matriz de interpolação global definida por

$$\mathbf{N}^g(\mathbf{x}) = [\text{diag}[N_1^g(\mathbf{x})] \quad \text{diag}[N_2^g(\mathbf{x})] \quad \cdots \quad \text{diag}[N_{n_{\text{pontos}}}^g(\mathbf{x})]], \quad (3.19)$$

em que $\text{diag}[N_i^g(\mathbf{x})]$ denota a matriz diagonal $n_{\text{dim}} \times n_{\text{dim}}$ dada por

$$\text{diag}[N_i^g] = \begin{bmatrix} N_i^g & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_i^g & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & N_i^g \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Deste modo, considerando o campo vetorial genérico $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ definido no domínio global Ω , a interpolação ${}^h\mathbf{a}$ poderá agora ser expressa por

$${}^h\mathbf{a} = \mathbf{N}^g(\mathbf{x}) \mathbf{a}, \quad (3.21)$$

em que \mathbf{a} é o vetor global dos valores nodais do campo vetorial

$$\mathbf{a} = [a_1^1, \dots, a_{n_{\text{dim}}}^1, \dots, a_1^{n_{\text{pontos}}}, \dots, a_{n_{\text{dim}}}^{n_{\text{pontos}}}]^T, \quad (3.22)$$

em que o elemento genérico a_i^j é a componente i do campo vetorial no nó global j . Em particular, pode agora ser definido o vetor global dos deslocamentos nodais

$$\mathbf{u} = [u_1^1, \dots, u_{n_{\text{dim}}}^1, \dots, u_1^{n_{\text{pontos}}}, \dots, u_{n_{\text{dim}}}^{n_{\text{pontos}}}]^T, \quad (3.23)$$

e qualquer ${}^h\mathbf{u} \in {}^h\mathcal{K}$ pode ser expresso por

$${}^h\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^g(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \quad (3.24)$$

em que as componentes de \mathbf{u} correspondentes a pontos nodais em $\partial\Omega_u$ satisfazem a condição de fronteira essencial de acordo com a definição de ${}^h\mathcal{K}$. Analogamente, o vetor global dos deslocamentos virtuais é definido por

$$\boldsymbol{\eta} = [\eta_1^1, \dots, \eta_{n_{\text{dim}}}^1, \dots, \eta_1^{n_{\text{pontos}}}, \dots, \eta_{n_{\text{dim}}}^{n_{\text{pontos}}}]^T, \quad (3.25)$$

e qualquer ${}^h\boldsymbol{\eta} \in {}^h\mathcal{V}$ pode ser expresso por

$${}^h\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^g(\mathbf{x}) \boldsymbol{\eta}, \quad (3.26)$$

em que as componentes de $\boldsymbol{\eta}$ correspondentes a pontos nodais em $\partial\Omega_u$ se anulam de acordo com a definição de ${}^h\mathcal{V}$.

Em segundo lugar, é conveniente introduzir os designados operadores gradiente simétrico discreto global, \mathbf{B}^g , e gradiente discreto global, \mathbf{G}^g . Convém notar que ambos os operadores terão de ser definidos em função do tipo de problema em causa. Como exemplo, considerando os problemas bidimensionais, os operadores discretos tomam a forma

$$\mathbf{B}^g = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^g}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^g}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{n_{\text{pontos}}}^g}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^g}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^g}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{n_{\text{pontos}}}^g}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^g}{\partial y} & \frac{\partial N_1^g}{\partial x} & \frac{\partial N_2^g}{\partial y} & \frac{\partial N_2^g}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{n_{\text{pontos}}}^g}{\partial y} & \frac{\partial N_{n_{\text{pontos}}}^g}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

e

$$\mathbf{G}^g = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^g}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^g}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{n_{\text{pontos}}}^g}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^g}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^g}{\partial x} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{n_{\text{pontos}}}^g}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^g}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^g}{\partial y} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{n_{\text{pontos}}}^g}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^g}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^g}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{n_{\text{pontos}}}^g}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Por último, é importante notar que as entidades matriciais introduzidas anteriormente no domínio global são definidas de forma idêntica no domínio local utilizando as funções de forma do elemento. Considerando um elemento finito genérico e definido por $n_{\text{nós}}$ nós, a matriz de interpolação, \mathbf{N} , toma a forma

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = [\text{diag}[N_1^{(e)}(\mathbf{x})] \quad \text{diag}[N_2^{(e)}(\mathbf{x})] \quad \dots \quad \text{diag}[N_{n_{\text{nós}}}^{(e)}(\mathbf{x})]], \quad (3.29)$$

e os operadores gradiente discreto, \mathbf{B} , e gradiente simétrico discreto, \mathbf{G} , considerando novamente problemas de estado plano de tensão e estado plano de deformação são definidos por

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{n_{\text{nós}}}^{(e)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{n_{\text{nós}}}^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{n_{\text{nós}}}^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_{n_{\text{nós}}}^{(e)}}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

e

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{n_{\text{nós}}}^{(e)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{n_{\text{nós}}}^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{n_{\text{nós}}}^{(e)}}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{n_{\text{nós}}}^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

3.3.3 Discretização das equações de equilíbrio

Considerando as entidades tensoriais definidas anteriormente e a discretização de \mathcal{K} e de \mathcal{V} , o problema incremental de valor de fronteira inicial pode por fim ser reduzido a um sistema de equações algébricas incrementais de elementos finitos. Este sistema de equações algébricas incrementais define o problema mecânico incremental quasi-estático discretizado de valor de fronteira inicial.

Atendendo à formulação espacial do problema incremental de valor de fronteira inicial, a substituição de \mathcal{K} e de \mathcal{V} por ${}^h\mathcal{K}$ e ${}^h\mathcal{V}$ na forma fraca incremental das equações de equilíbrio deduzida pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais, resulta em

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{\varphi}_{n+1}({}^h\Omega)} \left[\hat{\boldsymbol{\sigma}}^T(\boldsymbol{\alpha}_n, \mathbf{F}_{n+1}) \mathbf{B}^g \boldsymbol{\eta} - \mathbf{b}_{n+1} \cdot \mathbf{N}^g \boldsymbol{\eta} \right] dv \\ - \int_{\boldsymbol{\varphi}_{n+1}(\partial {}^h\Omega_s)} \mathbf{t}_{n+1} \cdot \mathbf{N}^g \boldsymbol{\eta} da = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in {}^h\mathcal{V}_t, \end{aligned} \quad (3.32)$$

equação que pode ser reescrita como

$$\left\{ \int_{\varphi_{n+1}({}^h\Omega)} [(\mathbf{B}^g)^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \mathbf{F}_{n+1}) - (\mathbf{N}^g)^T \mathbf{b}_{n+1}] dv - \int_{\varphi_{n+1}(\partial^h\Omega_s)} (\mathbf{N}^g)^T \mathbf{t}_{n+1} da \right\}^T \boldsymbol{\eta} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in {}^h\mathcal{V}. \quad (3.33)$$

Dado que a equação acima deve ser satisfeita para qualquer vetor $\boldsymbol{\eta} \in {}^h\mathcal{V}$ e lembrando que o gradiente de deformação depende do campo de deslocamentos \mathbf{u}_{n+1} , é possível definir o designado problema incremental quasi-estático discretizado de valor de fronteira inicial:

Encontre-se o vetor global dos deslocamentos nodais cinematicamente admissível $\mathbf{u}_{n+1} \in {}^h\mathcal{K}$ que satisfaça a forma fraca de equilíbrio discretizada

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}) \equiv \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{u}_{n+1}) - \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} = \mathbf{0}, \quad (3.34)$$

em que \mathbf{f}^{int} e $\mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}}$ são respetivamente os vetores globais das forças internas e externas

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \int_{\varphi_{n+1}({}^h\Omega)} (\mathbf{B}^g)^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \mathbf{F}_{n+1}) dv, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} = \int_{\varphi_{n+1}({}^h\Omega)} (\mathbf{N}^g)^T \mathbf{b}_{n+1} dv + \int_{\varphi_{n+1}(\partial^h\Omega_s)} (\mathbf{N}^g)^T \mathbf{t}_{n+1} da. \quad (3.36)$$

A Equação (3.34) é geralmente não-linear. A fonte de não-linearidade consiste na não-linearidade associada ao funcional constitutivo incremental que integra a definição do vetor global das forças internas. Convém também notar que dado ter sido considerada a formulação espacial do problema discretizado, \mathbf{B}^g toma agora a designação de operador gradiente simétrico discreto espacial e as funções de forma globais são derivadas em ordem às coordenadas espaciais.

No procedimento computacional pelo Método dos Elementos Finitos, os vetores globais das forças internas e externas são geralmente obtidos por assemblagem dos respetivos vetores elementares

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \bigvee_{e=1}^{n_{\text{elem}}} (\mathbf{f}^{\text{int}})^{(e)}, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{f}^{\text{ext}} = \bigvee_{e=1}^{n_{\text{elem}}} (\mathbf{f}^{\text{ext}})^{(e)}, \quad (3.38)$$

em que

$$(\mathbf{f}^{\text{int}})^{(e)} = \int_{\varphi_{n+1}({}^h\Omega^{(e)})} (\mathbf{B})^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \mathbf{F}_{n+1}) dv, \quad (3.39)$$

$$(\mathbf{f}^{\text{ext}})^{(e)} = \int_{\varphi_{n+1}({}^h\Omega^{(e)})} (\mathbf{N})^T \mathbf{b}_{n+1} dv + \int_{\varphi_{n+1}(\partial^h\Omega_s^{(e)})} (\mathbf{N})^T \mathbf{t}_{n+1} da. \quad (3.40)$$

É aqui oportuno referir que no contexto do Método dos Elementos Finitos, as integrações sobre os domínios elementares são geralmente realizadas de forma numérica através do método de quadratura de Gauss. Considere-se um campo genérico $a(\mathbf{x})$, o domínio do elemento $\Omega^{(e)}$ e o domínio local (ou natural) normalizado Υ . Sendo $\mathbf{x} : \Upsilon \rightarrow \Omega^{(e)}$ o mapeamento entre ambos os domínios, o integral de $a(\mathbf{x})$ sobre o domínio $\Omega^{(e)}$ pode ser calculado numericamente como

$$\int_{\Omega^{(e)}} a(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Upsilon} a(\mathbf{x}(\boldsymbol{\zeta})) j(\boldsymbol{\zeta}) d\boldsymbol{\zeta} \approx \sum_{i=1}^{n_{\text{gauss}}} w_i a(\mathbf{x}(\boldsymbol{\zeta}_i)) j(\boldsymbol{\zeta}_i), \quad (3.41)$$

em que $\boldsymbol{\zeta}_i$, $i = 1, 2, \dots, n_{\text{gauss}}$ e w_i são respetivamente as posições e pesos dos pontos de integração de Gauss no domínio Υ e $j(\boldsymbol{\zeta})$ é o determinante do jacobiano da transformação \mathbf{x} definido por

$$j(\boldsymbol{\zeta}) = \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \right). \quad (3.42)$$

Note-se que até este ponto ainda não foi introduzido qualquer procedimento que permita definir os campos vetoriais das forças de volume \mathbf{b}_{n+1} e de tração de superfície \mathbf{t}_{n+1} no instante t_{n+1} . Uma possível estratégia consiste em assumir que o carregamento é definido por uma dada curva de carregamento proporcional $\lambda(t)$. De acordo com este procedimento, \mathbf{b}_{n+1} e \mathbf{t}_{n+1} , definidos num instante arbitrário t_{n+1} , são dados por

$$\mathbf{b}_{n+1} = \lambda_{n+1} \tilde{\mathbf{b}}, \quad (3.43)$$

$$\mathbf{t}_{n+1} = \lambda_{n+1} \tilde{\mathbf{t}}, \quad (3.44)$$

em que λ_{n+1} é o fator de carregamento prescrito em t_{n+1}

$$\lambda_{n+1} = \lambda(t_{n+1}), \quad (3.45)$$

e $\tilde{\mathbf{b}}$ e $\tilde{\mathbf{t}}$ são os valores prescritos totais dos campos vetoriais das forças de volume e de tração de superfície. Deste modo, o vetor global das forças externas pode ser definido em conformidade por

$$\mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} = \lambda_{n+1} \tilde{\mathbf{f}}^{\text{ext}}, \quad (3.46)$$

em que $\tilde{\mathbf{f}}^{\text{ext}}$ é apenas calculado uma vez no início do procedimento incremental e é geralmente obtido por assemblagem dos vetores elementares

$$(\tilde{\mathbf{f}}^{\text{ext}})^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{N})^T \tilde{\mathbf{b}} dv + \int_{\partial \Omega_s^{(e)}} (\mathbf{N})^T \tilde{\mathbf{t}} da. \quad (3.47)$$

O procedimento incremental de resolução associado a uma estratégia de carregamento proporcional encontra-se apresentado na Caixa 3.1 em formato de pseudo-código.

Atendendo à formulação material do problema incremental de valor de fronteira inicial, a substituição de \mathcal{K} e de \mathcal{V} por ${}^h\mathcal{K}$ e ${}^h\mathcal{V}$ na forma fraca incremental das equações de equilíbrio deduzida pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais resulta em

$$\int_{{}^h\Omega} \left[\hat{\mathbf{P}}^T(\boldsymbol{\alpha}_n, \mathbf{F}_{n+1}) \mathbf{G}^g \boldsymbol{\eta} - \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \cdot \mathbf{N}^g \boldsymbol{\eta} \right] dv - \int_{\partial {}^h\Omega_s} \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \mathbf{N}^g \boldsymbol{\eta} da = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in {}^h\mathcal{V}_t. \quad (3.48)$$

Seguindo o mesmo procedimento aplicado anteriormente, a formulação material do problema incremental quasi-estático discretizado de valor de fronteira inicial vem:

Caixa 3.1: Procedimento incremental de resolução do problema mecânico não-linear discretizado de valor de fronteira inicial.

- (i) Assemblagem do vetor global das forças externas, $\tilde{\mathbf{f}}^{\text{ext}}$
- (ii) Definição da curva de carregamento proporcional, $\lambda(t)$
- (iii) Inicialização do contador incremental, $i := 1$
- (iv) Atualização do fator de carregamento $\lambda_i := \lambda(t_i)$ no final do subintervalo de tempo atual $[t_{i-1}, t_i]$
- (v) Resolução da equação não-linear

$$\mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{u}_i) - \lambda_i \tilde{\mathbf{f}}^{\text{ext}} = \mathbf{0}$$

em ordem a \mathbf{u}_i (ver Caixa (3.2))

- (vi) Atualização das tensões e das variáveis internas, $\{\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\alpha}_i\}$
- (vii) Controlo do ciclo de incrementação
 SE $i < n_{\text{incr}}$ (número total de incrementos) ENTÃO
 $i := i + 1$ e IR PARA (iv)
 SENÃO
 SAIR

Encontre-se o vetor global dos deslocamentos nodais cinematicamente admissível $\mathbf{u}_{n+1} \in {}^h\mathcal{K}$ que satisfaça a forma fraca de equilíbrio discretizada

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{u}_{n+1}) - \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} = \mathbf{0}, \quad (3.49)$$

em que \mathbf{f}^{int} e $\mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}}$ são respetivamente os vetores globais das forças internas e externas

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \int_{{}^h\Omega} (\mathbf{G}^g)^T \hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \mathbf{F}_{n+1}) \, dv, \quad (3.50)$$

$$\mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} = \int_{{}^h\Omega} (\mathbf{N}^g)^T \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \, dv + \int_{\partial^h\Omega_s} (\mathbf{N}^g)^T \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \, da. \quad (3.51)$$

3.4 Método de Newton-Raphson

Em mecânica computacional, soluções numéricas de problemas não-lineares são geralmente obtidas por algoritmos que requerem a solução de uma sequência de problemas linearizados ou aproximadamente linearizados. O Método de Newton-Raphson é extensivamente utilizado no contexto do Métodos dos Elementos Finitos, tratando-se de um método robusto e eficiente, em particular na resolução do problema não-linear incremental expresso pelas Equações (3.34) e (3.49). A utilização deste método deve-se ainda à sua taxa de convergência quadrática.

Cada iteração do Método de Newton-Raphson envolve a resolução da versão linearizada do problema mecânico incremental quasi-estático discretizado de valor de fronteira inicial ou, de modo alternativo, da versão incremental discretizada da linearização da forma fraca de equilíbrio deduzida pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais. Adotando a segunda alternativa e considerando a formulação espacial do problema não-linear, a forma linearizada da Equação (2.94) é dada por

$$\int_{\varphi(\Omega)} \mathbf{a} : \nabla_x \delta \mathbf{u} : \nabla_x \boldsymbol{\eta} \, dv = - \int_{\varphi(\Omega)} [\boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\eta} - \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}] \, dv + \int_{\varphi(\partial\Omega_s)} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta} \, da, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (3.52)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor das tensões de Cauchy e o tensor de quarta ordem \mathbf{a} é o designado módulo tangente consistente espacial. A discretização temporal e espacial da Equação (3.52) resulta em

$$\left\{ \int_{\varphi_{n+1}(^h\Omega)} (\mathbf{G}^g)^T \mathbf{a} \mathbf{G}^g \, dv \right\} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} = - \left\{ \int_{\varphi_{n+1}(^h\Omega)} [(\mathbf{B}^g)^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \mathbf{F}_{n+1}) - (\mathbf{N}^g)^T \mathbf{b}_{n+1}] \, dv - \int_{\varphi_{n+1}(\partial^h\Omega_s)} (\mathbf{N}^g)^T \mathbf{t}_{n+1} \, da \right\} \cdot \boldsymbol{\eta}, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in {}^h\mathcal{V}, \quad (3.53)$$

e dado que a equação acima deve ser satisfeita para qualquer $\boldsymbol{\eta} \in {}^h\mathcal{V}$ pode escrever-se

$$\left\{ \int_{\varphi_{n+1}(^h\Omega)} (\mathbf{G}^g)^T \mathbf{a} \mathbf{G}^g \, dv \right\} \delta \mathbf{u} = - \left\{ \int_{\varphi_{n+1}(^h\Omega)} [(\mathbf{B}^g)^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \mathbf{F}_{n+1}) - (\mathbf{N}^g)^T \mathbf{b}_{n+1}] \, dv - \int_{\varphi_{n+1}(\partial^h\Omega_s)} (\mathbf{N}^g)^T \mathbf{t}_{n+1} \, da \right\}. \quad (3.54)$$

Deste modo, na etapa definida pelo vetor global dos deslocamentos nodais $\mathbf{u}_{n+1}^{(k-1)}$, a iteração (k) do Método de Newton-Raphson consiste em resolver o sistema de equações lineares

$$\mathbf{K}_T^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = -\mathbf{r}^{(k-1)}, \quad (3.55)$$

em ordem a $\delta \mathbf{u}^{(k)}$, em que \mathbf{r} é o já introduzido vetor global das forças residuais

$$\mathbf{r}^{(k-1)} = \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{u}_{n+1}^{(k-1)}) - \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}}, \quad (3.56)$$

e \mathbf{K}_T é a designada matriz de rigidez tangente global

$$\mathbf{K}_T^{(k-1)} = \int_{\varphi_{n+1}^{(k-1)}(^h\Omega)} (\mathbf{G}^g)^T \mathbf{a} \mathbf{G}^g \, dv = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \Big|_{\mathbf{u}_{n+1}^{(k-1)}}. \quad (3.57)$$

No procedimento do Método dos Elementos Finitos, a matriz de rigidez tangente global é geralmente obtida por assemblagem das matrizes de rigidez tangente elementares

$$\mathbf{K}_T = \bigvee_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \mathbf{K}_T^{(e)}, \quad (3.58)$$

em que

$$\mathbf{K}_T^{(e)} = \int_{\varphi_{n+1}^{(k-1)}(h\Omega)} (\mathbf{G})^T \mathbf{a} \mathbf{G} dv. \quad (3.59)$$

Após a resolução do sistema de equações lineares e determinação da solução $\delta \mathbf{u}^{(k)}$, o vetor global dos deslocamentos nodais é atualizado de acordo com

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}^{(k)}, \quad (3.60)$$

em que $\Delta \mathbf{u}^{(k)}$ é designado por vetor incremental dos deslocamentos nodais e dado por

$$\Delta \mathbf{u}^{(k)} = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)}. \quad (3.61)$$

O processo iterativo do Método de Newton-Raphson encontra-se esquematizado na Figura 3.2 e é repetido até que numa determinada iteração (m) seja satisfeito um dado critério de convergência adotado. Por exemplo, pode admitir-se que a solução convergiu se a seguinte condição for satisfeita

$$\frac{\|\mathbf{r}^{(m)}\|}{\|\mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}}\|} \leq \epsilon_{\text{tol}}, \quad (3.62)$$

em que ϵ_{tol} é uma tolerância de convergência suficientemente pequena. O vetor global dos deslocamentos nodais obtido na iteração (m), $\mathbf{u}_{n+1}^{(m)}$, é então aceite como uma aproximação suficiente da solução da Equação (3.34)

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^{(m)}. \quad (3.63)$$

Considerando em alternativa a formulação material do problema não-linear, a linearização da Equação (2.94) (ver página 29) em torno de \mathbf{u}^* é dada por

$$\int_{\Omega} \mathbf{A} : \nabla_X \delta \mathbf{u} : \nabla_X \boldsymbol{\eta} dv = - \int_{\Omega} [\mathbf{P} : \nabla_X \boldsymbol{\eta} - \bar{\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\eta}] dv + \int_{\partial \Omega_s} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} da, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (3.64)$$

em que \mathbf{P} é o primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff correspondente ao campo de deslocamentos \mathbf{u}^* e o tensor de quarta ordem \mathbf{A} é o designado módulo tangente consistente material definido por

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}} \Big|_{\mathbf{F}^*}, \quad (3.65)$$

em que

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{I} + \nabla_X \mathbf{u}^*. \quad (3.66)$$

Seguindo o mesmo procedimento aplicado anteriormente, a discretização temporal e espacial da Equação (3.64) resulta em

$$\left\{ \int_{h\Omega} (\mathbf{G}^g)^T \mathbf{A} \mathbf{G}^g dv \right\} \delta \mathbf{u} = - \left\{ \int_{h\Omega} [(\mathbf{B}^g)^T \hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \mathbf{F}_{n+1}) - (\mathbf{N}^g)^T \bar{\mathbf{b}}_{n+1}] dv - \int_{\partial^h \Omega_s} (\mathbf{N}^g)^T \bar{\mathbf{t}}_{n+1} da \right\}. \quad (3.67)$$

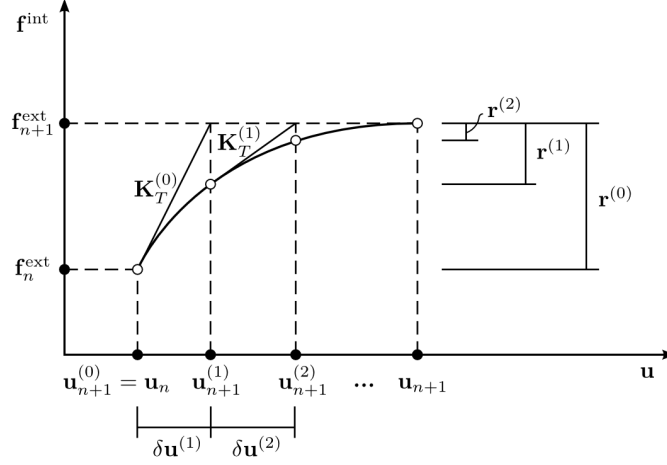


Figura 3.2: Representação esquemática da aplicação do Método de Newton-Raphson na resolução do problema mecânico incremental quasi-estático discretizado de valor de fronteira inicial.

Na etapa definida pela vetor global dos deslocamentos nodais $\mathbf{u}_{n+1}^{(k-1)}$, a iteração (k) do Método de Newton-Raphson consiste em resolver o sistema de equações lineares (3.55), porém agora a matriz de rigidez tangente global, \mathbf{K}_T , é definida por

$$\mathbf{K}_T^{(k-1)} = \int_{h\Omega} (\mathbf{G}^g)^T \mathbf{A} \mathbf{G}^g dv = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \right|_{\mathbf{u}_{n+1}^{(k-1)}}, \quad (3.68)$$

e é geralmente obtida por assemblagem das matrizes de rigidez tangente elementares como

$$\mathbf{K}_T = \bigvee_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \mathbf{K}_T^{(e)}, \quad (3.69)$$

em que

$$\mathbf{K}_T^{(e)} = \int_{h\Omega} \mathbf{G}^T \mathbf{A} \mathbf{G} dv. \quad (3.70)$$

Note-se que na formulação pelo Método dos Elementos Finitos, o tensor de quarta ordem \mathbf{A} é geralmente designado por módulo tangente consistente material e é definido por

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \hat{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} \right|_{\mathbf{F}_{n+1}^{(k-1)}}. \quad (3.71)$$

Para iniciar o processo iterativo do Método de Newton-Raphson é necessária uma estimativa inicial do vetor global dos deslocamentos nodais, $\mathbf{u}_{n+1}^{(0)}$. Esta é geralmente tomada pelo vetor global dos deslocamentos nodais correspondente à solução do incremento anterior, i.e.

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{u}_n. \quad (3.72)$$

O processo iterativo correspondente à aplicação do Método de Newton-Raphson na resolução do problema mecânico incremental quasi-estático discretizado de valor de fronteira inicial encontra-se apresentado na Caixa 3.2 em formato de pseudo-código.

Caixa 3.2: Método de Newton-Raphson na resolução do problema não-linear incremental quasi-estático discretizado de valor de fronteira inicial.

(i) Inicialização do contador iterativo, $k := 0$

(ii) Estabelecer a estimativa inicial do vetor global dos deslocamentos nodais e respetivo vetor global das forças residuais

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(0)} := \mathbf{u}_n; \quad \mathbf{r}^{(0)} := \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{u}_n) - \lambda_{n+1} \tilde{\mathbf{f}}^{\text{ext}}$$

(iii) Cálculo do módulo tangente consistente espacial^a

$$\mathbf{a}_{ijkl} := \frac{1}{J} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial F_{km}} F_{lm} - \sigma_{il} \delta_{jk}$$

(iv) Cálculo das matrizes de rigidez tangente elementares

$$\mathbf{K}_T^{(e)} := \sum_{i=1}^{n_{\text{gaus}}} w_i j_i \mathbf{G}_i^T \mathbf{a}_i \mathbf{G}_i$$

(v) $k := k + 1$. Assemblagem das matriz de rigidez tangente global e resolução do sistema de equações lineares

$$\mathbf{K}_T^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = -\mathbf{r}^{(k-1)}$$

(vi) Atualização do vetor global dos deslocamentos nodais

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} := \mathbf{u}_{n+1}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)}$$

(vii) Atualização do gradiente de deformação

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(k)} := \left(\mathbf{I} - \nabla_x \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} \right)^{-1}$$

(viii) Atualização das tensões e das variáveis internas de acordo com os respetivos funcionais constitutivos incrementais

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} := \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \mathbf{F}_{n+1}^{(k)}); \quad \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} := \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \mathbf{F}_{n+1}^{(k)})$$

(ix) Cálculo dos vetores elementares das forças internas

$$(\mathbf{f}^{\text{int}})^{(e)} := \sum_{i=1}^{n_{\text{gaus}}} w_i j_i \mathbf{B}_i^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} \Big|_i$$

^aO tensor $\boldsymbol{\tau}$ trata-se do tensor das tensões de Kirchhoff e é simplesmente definido em função do tensor das tensões de Cauchy por $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$.

Caixa 3.2: (continuação)

- (x) Assemblagem do vetor global das forças internas e atualização do vetor global das forças residuais

$$\mathbf{r}^{(k)} := \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}) - \lambda_{n+1} \bar{\mathbf{f}}^{\text{ext}}$$

- (xi) Verificação de convergência da solução

$$\text{SE } \|\mathbf{r}^{(k)}\| / \|\mathbf{f}^{\text{ext}}\| \leq \epsilon_{\text{tol}} \text{ ENTÃO}$$

$$(\cdot)_{n+1} := (\cdot)_{n+1}^{(k)} \text{ e SAIR}$$

SENÃO

IR PARA (iii)

Página intencionalmente deixada em branco

Capítulo 4

Modelos Multi-Escala baseados em Homogeneização

4.1 Introdução

A mecânica dos meios contínuos baseia-se na hipótese fundamental de que um determinado corpo pode ser visto como tendo uma distribuição de matéria contínua, i.e. o corpo é tomado como um conjunto contínuo de partículas materiais nas quais o material é assumido homogêneo. Por este motivo, os modelos materiais desenvolvidos segundo essa abordagem podem ser designados de modo geral por modelos constitutivos contínuos. Como já foi descrito previamente (ver Secção 2.7.1), um modelo constitutivo contínuo baseado em variáveis internas consiste num conjunto de equações que estabelece a relação do estado de tensão do material com o estado de deformação atual e com as variáveis internas que armazenam informação sobre o histórico de deformação. A contemplação de quaisquer mecanismos ou fenómenos relacionados com a microestrutura do material requer a definição de um conjunto de variáveis internas, o estabelecimento das respetivas leis constitutivas de evolução e a sua incorporação na função de cedência que governa o comportamento macroscópico do material em deformação. Este tipo de modelos tem permitido obter soluções com uma precisão satisfatória para um grande leque de problemas de engenharia, quer a nível da comunidade científica quer no contexto industrial.

Independentemente do tipo de material que seja considerado, as propriedades mecânicas e o comportamento macroscópico do mesmo são dependentes em maior ou menor grau da sua microestrutura. O desenvolvimento de novos materiais assenta em grande escala na capacidade tecnológica existente para projetar e definir a sua microestrutura. Com o objetivo de otimizar e maximizar as propriedades mecânicas do material face à aplicação em causa, a microestrutura tende a tornar-se cada vez mais complexa como resultado da inclusão de diferentes constituintes e a promoção de diferentes mecanismos a nível microscópico. De particular importância no domínio da engenharia estrutural encontram-se também os fenómenos de dano e de degradação interna, os quais se encontram intrinsecamente relacionados com diferentes mecanismos que ocorrem ao nível da microestrutura do material e que apresentam interações complexas entre si. Assim, em aplicações onde a dependência da microestrutura é preponderante e é exigido um elevado grau de precisão na descrição do comportamento macroscópico do material, os modelos constitutivos contínuos encontram-se

de certo modo limitados, uma vez que o estabelecimento de variáveis internas e respectivas leis de evolução se torna difícil face à complexidade crescente dos fenómenos microscópicos que se pretendem modelar e incorporar na resposta macroscópica do material.

Para superar tais limitações, várias aproximações têm sido recentemente desenvolvidas no seio da comunidade da mecânica computacional, entre as quais se destaca a modelação multi-escala. Tal como o nome indica, esta metodologia tem por objetivo estabelecer a relação entre o comportamento macroscópico do material e a evolução da sua microestrutura através da troca contínua de informação entre diferentes escalas. Os modelos multi-escala desenvolvidos até à data podem classificar-se em três categorias: modelos concorrentes, modelos hierárquicos e modelos híbridos. Na presente dissertação é explorado um modelo multi-escala hierárquico, no qual as dimensões características da macro e da microescala são suficientemente separadas e, conseqüentemente, ambas as escalas podem ser hierarquicamente acopladas no mesmo ponto do domínio macroscópico. O princípio base deste tipo de modelo pode ser compreendido com facilidade: à análise macroscópica do problema estrutural é incorporada uma análise simultânea à microescala, a qual permite considerar de forma explícita os diferentes mecanismos e fenómenos associados à microestrutura do material. Em particular, nos designados modelos multi-escala baseados em homogeneização computacional, os tensores de tensão macroscópicos são obtidos através de um procedimento de homogeneização volumétrica aplicado sobre um elemento de volume estatisticamente representativo da microestrutura do material. Neste último é possível modelar explicitamente os diferentes constituintes e heterogeneidades que caracterizam a microestrutura complexa do material, permitindo assim ultrapassar as limitações associadas aos modelos constitutivos contínuos.

Os princípios base dos modelos multi-escala foram introduzidos e bem estabelecidos na década de 90 e no início dos anos 2000. Guedes and Kikuchi (1990) introduziram uma metodologia numérica na qual as propriedades elásticas macroscópicas de materiais compósitos são obtidas a partir de análises por elementos finitos sobre EVRs e posteriormente utilizadas num modelo de elementos finitos macroscópico. Nesta metodologia é ainda incluído um procedimento de pós-processamento com o objetivo de obter a distribuição microscópica dos campos de deformações e tensões. Uma estratégia semelhante foi proposta por Ghosh et al. (1995), na qual a teoria de homogeneização assintótica é combinada com o método dos elementos finitos de células Voronoi para determinar o comportamento macroscópico do material. Smit et al. (1998) apresentaram um modelo multi-escala hierárquico no qual um EVR convenientemente discretizado em elementos finitos é associado a cada ponto de integração do domínio macroscópico. O campo de tensões macroscópico é obtido através de homogeneização computacional após a resolução do problema de equilíbrio microscópico ao nível do EVR, o qual é sujeito à deformação proveniente da macroescala e restringido por condições de fronteira periódicas. A implementação deste modelo multi-escala, no qual são consideradas malhas distintas nos problemas à macro e à microescala, revelou que este é particularmente adequado para análises de grandes deformações de materiais com um comportamento constitutivo complexo à microescala. Neste contexto, Miehe e os seus colaboradores (Miehe et al. (1999a), Miehe et al. (1999b), Miehe and Koch (2002), Miehe (2003)) deram contribuições importantes no que diz respeito à linearização do problema macroscópico em pequenas e grandes deformações e à obtenção do módulo tangente requerido pelo método iterativo de Newton-Raphson. Outras implementações estabeleceram por fim a modelação multi-escala como uma ferramenta computacional de grande potencial, referindo-se os trabalhos de Feyel and Chaboche (2000) e de Kouznetsova et al. (2001). Apesar deste aspeto, deve notar-se que se trata de um tema bastante recente na comunidade

da mecânica computacional e no qual existe ainda uma grande margem para desenvolvimento. De particular importância na presente dissertação é a formulação variacional para grandes deformações de um modelo multi-escala hierárquico de primeira ordem baseado em homogeneização computacional apresentada por de Souza Neto and Feijóo (2006). É este o modelo multi-escala que se encontra implementado no programa LINKS (descrito no capítulo seguinte) e que será utilizado para atingir os objetivos estabelecidos.

Para além das vantagens já mencionadas e de um amplo leque de aplicações onde estes modelos podem ser explorados, destaca-se aqui a sua potencialidade na verificação, desenvolvimento e otimização de modelos constitutivos contínuos. Em particular, no domínio da fratura dúctil de metais e ligas metálicas estruturais, a utilização de modelos multi-escala poderá dar um contributo significativo no desenvolvimento de modelos de dano contínuos com maior precisão.

Neste capítulo, inspirado essencialmente na obra de Souza Neto et al. (2008), são apresentados os conceitos essenciais de um modelo multi-escala baseado em homogeneização computacional. Em primeiro lugar são introduzidos o conceito de Elemento de Volume Representativo (EVR) e alguns pontos fundamentais da teoria de transição de escalas. Segue-se a formulação variacional do modelo matemático que define o problema de equilíbrio à microescala e são detalhados os tipos de condições de fronteira mais comuns. Por último, é apresentada uma descrição sucinta da resolução numérica do problema de equilíbrio à microescala com base no Método dos Elementos Finitos.

4.2 Elemento de Volume Representativo

O conceito de Elemento de Volume Representativo (EVR) é fundamental no desenvolvimento de um modelo multi-escala acoplado. Enquanto à macroescala o material pode continuar a ser considerado um meio contínuo homogêneo, as múltiplas heterogeneidades e singularidades da estrutura do material à microescala têm de ser consideradas de algum modo. Dado que a modelação direta da microestrutura de todo o domínio do material seria impraticável, Hill (1963) sugeriu pela primeira vez a existência de uma sub-região do material que seria estatisticamente representativa e que permitiria caracterizar a microestrutura do material.

O Elemento de Volume Representativo (EVR) surgiu assim como um modelo geométrico de um meio heterogêneo, em que cada heterogeneidade (fases constituintes, fibras, inclusões, ...) e singularidade (vazios) é explicitamente representada tal como se encontra representado na Figura 4.1. Neste esquema, o EVR, de domínio Ω_μ e de fronteira $\partial\Omega_\mu$, é constituído por inclusões, de domínio Ω_μ^i e fronteira $\partial\Omega_\mu^i$, e por vazios, de domínio Ω_μ^v e fronteira $\partial\Omega_\mu^v$. O domínio do EVR pode assim dividir-se num sub-domínio material Ω_μ^s (constituintes sólidos) e num subdomínio Ω_μ^v (vazios).

Para que o EVR caracterize apropriadamente a microestrutura associada a uma dada partícula material do domínio macroscópico, deve ter uma dimensão que inclua o maior número de heterogeneidades que representam, em termos médios, a microestrutura do material (Nemat-Nasser and Hori, 1993). Deste modo, a dimensão característica do EVR, l_{EVR} , deve ser simultaneamente muito superior ao comprimento característico das heterogeneidades l_{het} e das singularidades l_{sing} e muito inferior ao comprimento característico do domínio macroscópico l_{macro} . Tais relações traduzem o designado Princípio de Separação de Escalas (Hashin, 1983), o qual pode ser expresso por

$$l_{\text{het}}, l_{\text{sing}} \ll l_{\text{EVR}} \ll l_{\text{macro}}, \quad (4.1)$$

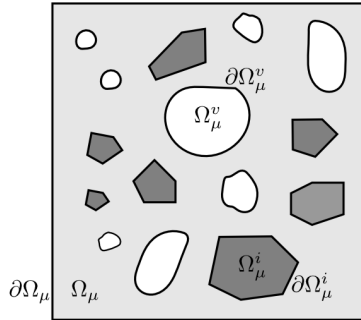


Figura 4.1: Esquema representativo de um Elemento de Volume Representativo (EVR).

e se encontra subjacente às definições de EVR apresentadas por diversos autores (Hashin (1983), Nemat-Nasser and Hori (1993), Gitman et al. (2007)). Compreende-se assim a importância do tamanho do EVR considerado numa análise multi-escala, o qual deverá ser definido primariamente em função da microestrutura do material e do comportamento dos constituintes. Outros aspetos de maior complexidade, como a convergência da homogeneização ou a ocorrência de amaciamento, devem também ser tidos em conta e poderão ser consultados com detalhe em Terada et al. (2000) e Gitman et al. (2007) por exemplo.

No contexto do Métodos dos Elementos Finitos, o EVR é discretizado numa malha de elementos finitos e cada constituinte é considerado como um meio contínuo, ou seja, o seu comportamento pode ser descrito por um modelo constitutivo tradicional apropriado. Para além disso, deve aqui ser referido que na presente dissertação será considerado um modelo de primeira ordem, onde apenas a proporcionalidade dimensional entre os diversos constituintes têm influência na solução numérica. No caso de modelos de segunda ordem, as dimensões absolutas do EVR são explicitamente consideradas na formulação do modelo e são consequentemente preponderantes nos resultados obtidos (Kouznetsova et al., 2004).

4.3 Modelo multi-escala e teoria de transição de escalas

4.3.1 Descrição de um modelo multi-escala

Considere-se o problema quasi-estático discretizado de valor de fronteira inicial definido previamente pelas Equações (3.34) e (3.49) no Capítulo 3. Para realizar uma análise multi-escala acoplada, a cada partícula material à macroescala é associado um EVR representativo da sua microestrutura e no qual as heterogeneidades e singularidades são explicitamente modeladas. No caso geral, dado que o funcional constitutivo incremental é definido ao nível do ponto de integração, o número de EVRs a considerar será igual ao número total de pontos de integração da malha de elementos finitos. Note-se que a diferentes pontos de integração poderão ser atribuídos EVRs distintos, em função da representatividade da microestrutura na região.

Durante o procedimento *standard* de resolução do problema à macroescala, descrito com detalhe no Capítulo 3, sempre que o comportamento constitutivo macroscópico é calculado num ponto de integração da malha surge um problema à microescala associado ao respe-

tivo EVR. A perturbação ao equilíbrio do EVR é imposta pelo gradiente de deformação macroscópico $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ e, de acordo com as restrições cinemáticas impostas pelas condições de fronteira, o problema de equilíbrio à microescala é resolvido. Por último, com base no campo de tensões microscópico determinado, o tensor das tensões macroscópico $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ e o módulo tangente consistente $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ são calculados por um processo de homogeneização, estabelecendo assim o retorno à macroescala. No programa utilizado é considerado o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff, dado tratar-se do conjugado energético da taxa do gradiente de deformação em relação à configuração de referência¹. Na Figura 4.2 pode observar-se uma representação esquemática de um modelo multi-escala baseado numa formulação de grandes deformações.

Para que a distinção entre variáveis e equações referentes às duas escalas seja clara, a posição de um ponto material e espacial à microescala é respetivamente denotada por \mathbf{Y} e \mathbf{y} . Note-se que esta notação é perfeitamente consistente com a correspondente notação macroscópica, em que a posição de um ponto material e espacial são denotadas por \mathbf{X} e \mathbf{x} respetivamente.

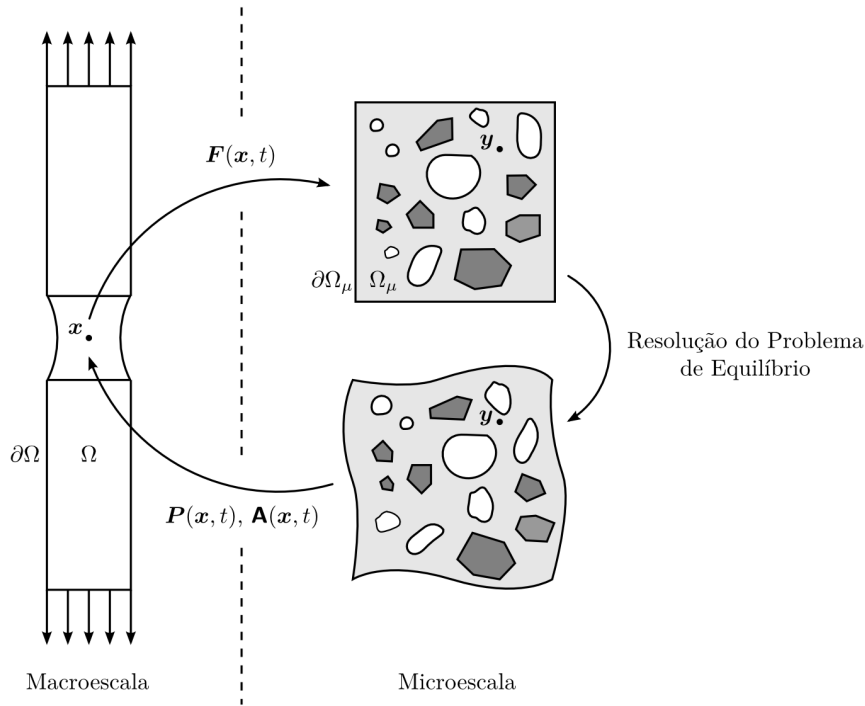


Figura 4.2: Esquema representativo de um modelo multi-escala.

¹Pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais demonstra-se que o trabalho virtual das forças internas pode ser dado por

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega} \mathbf{P} : \delta \dot{\mathbf{F}} \, dv,$$

surgindo desta expressão o conceito de conjugado energético ou *work conjugate*.

4.3.2 Teoria de transição de escalas

O primeiro princípio que enuncia a existência de duas escalas diferentes já foi introduzido previamente consiste no Princípio da Separação de Escalas. Este princípio tem de ser necessariamente satisfeito para que o processo de homogeneização de deformações e tensões que se descreve de seguida seja válido.

Por sua vez, a homogeneização é um dos conceitos base de um modelo multi-escala na medida em que permite a transição de quantidades definidas à microescala para as correspondentes à macroescala. No presente trabalho, a homogeneização é realizada através da média volumétrica sobre o volume do EVR na sua configuração de referência V_{μ_0} , ou seja, segundo uma descrição material. Considerando um campo tensorial genérico $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ definido à microescala, a sua homogeneização para a macroescala é simplesmente dada por

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_{\mu_0}} \int_{\Omega_\mu} \mathbf{A}(\mathbf{y}) \, dv, \quad (4.2)$$

em que o domínio Ω_μ diz respeito à configuração de referência do EVR.

Outro dos princípios basilares da teoria de transição de escalas é o princípio de Hill-Mandel. Este princípio estabelece a ligação entre as duas escalas invocando a conservação do fluxo de energia (ou potência) entre as mesmas. Formalmente enuncia que a potência de tensão à macroescala tem de ser igual à correspondente potência de tensão à microescala homogeneizada de tal modo que

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) : \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_{\mu_0}} \int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}(\mathbf{y}, t) : \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{y}, t) \, dv, \quad (4.3)$$

em que $\dot{\mathbf{F}}$ é a taxa do gradiente de deformação.

4.4 Problema de equilíbrio à microescala

Neste subcapítulo será definido o problema de equilíbrio à microescala considerando novamente uma formulação variacional baseada no Princípio dos Trabalhos Virtuais. A correta definição e resolução do problema à microescala é fundamental na medida em que estabelece a ponte entre a imposição do gradiente de deformação macroscópico e a obtenção do campo de tensões microscópico que será convenientemente homogeneizado. Como já foi referido, no presente trabalho o tensor das tensões a ser homogeneização é primeiro tensor de Piola-Kirchhoff.

A definição do problema de equilíbrio à microescala é precedida de quatro etapas necessárias à sua compreensão:

1. Imposição do gradiente de deformação macroscópico;
2. Campo de deslocamentos microscópicos admissível;
3. Equações de equilíbrio do EVR;
4. Consequências do princípio de Hill-Mandel.

4.4.1 Imposição do gradiente de deformação macroscópico

Considerando uma formulação de grandes deformações, a deformação à macroescala é transferida para a microescala e imposta ao EVR através do gradiente de deformação. Deste modo, de acordo com o processo de homogeneização já definido pode escrever-se a equivalência

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_{\mu_0}} \int_{\Omega_\mu} \mathbf{F}(\mathbf{y}, t) dv, \quad (4.4)$$

e recuperando a Equação (2.16) verifica-se de forma trivial que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{I} + \frac{1}{V_{\mu_0}} \int_{\Omega_\mu} \nabla_X \mathbf{u}(\mathbf{y}, t) dv. \quad (4.5)$$

A aplicação do Teorema de Gauss permite reescrever a expressão anterior em função de um integral ao longo da fronteira do EVR $\partial\Omega_\mu$ tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{I} + \frac{1}{V_{\mu_0}} \int_{\partial\Omega_\mu} \mathbf{u}(\mathbf{y}, t) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{Y}) da, \quad (4.6)$$

em que $\mathbf{n}(\mathbf{Y})$ é o versor normal à fronteira $\partial\Omega_\mu$ do EVR na sua configuração de referência.

4.4.2 Campo de deslocamentos microscópico admissível

A perturbação do EVR através da imposição do gradiente de deformação resulta num campo de deslocamentos microscópico. Com base na equivalência estabelecida pela homogeneização do gradiente de deformação, é possível definir o designado conjunto de deslocamentos microscópicos cinematicamente admissíveis minimamente restringidos como

$$\mathcal{K}_\mu = \left\{ \mathbf{u}, \text{suficientemente regular} \left| V_{\mu_0}(\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{I}) = \int_{\partial\Omega_\mu} \mathbf{u}(\mathbf{y}, t) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{Y}) da \right. \right\}. \quad (4.7)$$

O campo de deslocamentos microscópico pode, sem qualquer perda de generalidade, ser decomposto numa componente linear e numa componente de flutuações tal que

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}, t) = [\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{I}] \mathbf{Y} + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t), \quad (4.8)$$

em que $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t)$ consiste no campo de flutuação de deslocamentos. Note-se que a primeira componente depende linearmente do gradiente de deformação macroscópico imposto, pelo que a única incógnita do problema de equilíbrio à microescala é o campo de flutuação de deslocamentos.

Com base na decomposição anterior, também o gradiente de deformação microscópico definido por

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{I} + \nabla_X \mathbf{u}(\mathbf{y}, t), \quad (4.9)$$

pode ser decomposto numa componente de deformação homogénea e numa componente associada ao campo de flutuação de deslocamentos como

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + \nabla_X \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t). \quad (4.10)$$

Substituindo a Equação (4.10) na Equação (4.4) obtém-se a expressão

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{V_{\mu_0}} \int_{\Omega_\mu} \nabla_X \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) dv, \quad (4.11)$$

ou seja

$$\int_{\Omega_\mu} \nabla_X \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) \, dv = 0. \quad (4.12)$$

Aplicando novamente o teorema de Gauss temos

$$\int_{\Omega_\mu} \nabla_X \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) \, dv = \int_{\partial\Omega_\mu} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{Y}) \, da = \mathbf{0}, \quad (4.13)$$

e pode então ser definido o designado conjunto de flutuações de deslocamentos microscópicos cinematicamente admissíveis e minimamente restringidos

$$\tilde{\mathcal{K}}_\mu = \left\{ \tilde{\mathbf{u}}, \text{ suficientemente regular } \left| \int_{\partial\Omega_\mu} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{Y}) \, da = \mathbf{0} \right. \right\}. \quad (4.14)$$

4.4.3 Equações de equilíbrio do EVR

Como já foi referido, o EVR é considerado um meio contínuo e, deste modo, todas as entidades e relações estabelecidas no Capítulo 2 são aqui aplicáveis.

Segundo uma descrição espacial a forma forte das equações de equilíbrio do EVR pode ser definida pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{b}_\mu(\mathbf{y}, t) = \mathbf{0}, & \forall \mathbf{y} \in \varphi_\mu(\Omega_\mu^s), \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{b}_\mu(\mathbf{y}, t) = \mathbf{0}, & \forall \mathbf{y} \in \varphi_\mu(\Omega_\mu^v), \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}, t) \mathbf{n}(\mathbf{y}) - \mathbf{t}_\mu(\mathbf{y}, t) = \mathbf{0}, & \forall \mathbf{y} \in \varphi_\mu(\partial\Omega_\mu), \\ \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}, t) \mathbf{n}(\mathbf{y})\| = \mathbf{0}, & \forall \mathbf{y} \in \varphi_\mu(\partial\Omega_\mu^v), \end{cases} \quad (4.15)$$

em que \mathbf{b}_μ são as forças de volume por unidade de volume na configuração deformada do EVR e \mathbf{t}_μ são as forças de tração de fronteira por unidade de área da fronteira do EVR na configuração deformada. Note-se que a última equação garante a continuidade do campo vetorial $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}, t) \mathbf{n}(\mathbf{y})$ ao impor que a descontinuidade do campo é nula na interface sólido-vazio.

A forma fraca das equações de equilíbrio do EVR pode ser deduzida pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais. Considerando a Equação (2.75) (ver página 24), temos segundo uma descrição espacial

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(\Omega_\mu)} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}, t) : \nabla_x \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\varphi(\Omega_\mu^s)} \mathbf{b}_\mu(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\varphi(\partial\Omega_\mu)} \mathbf{t}_\mu(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\eta} \, da \\ - \int_{\varphi(\partial\Omega_\mu^v)} \mathbf{t}_\mu^v(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\eta} \, da = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu, \end{aligned} \quad (4.16)$$

em que \mathbf{t}_μ^v são as forças de tração nas superfícies internas (interface sólido-vazio) por unidade de área na configuração deformada. Este termo será nulo se não existir qualquer fluido pressurizado no interior do vazio. Dado que a condição de restrição mínima (4.13) deve ser satisfeita, o conjunto dos deslocamentos virtuais do EVR coincide com o conjunto

de flutuações de deslocamentos microscópicos cinematicamente admissíveis e minimamente restringido tal que

$$\mathcal{V}_\mu \equiv \tilde{\mathcal{K}}_\mu. \quad (4.17)$$

Analogamente, a forma fraca das equações de equilíbrio do EVR pode ser expressa segundo uma descrição material de acordo com a Equação (2.76) (ver página 24) e temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}(\mathbf{y}, t) : \nabla_X \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\Omega_\mu^s} \bar{\mathbf{b}}_\mu(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\partial\Omega_\mu} \bar{\mathbf{t}}_\mu(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\eta} \, da \\ - \int_{\partial\Omega_\mu^v} \bar{\mathbf{t}}_\mu^v(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\eta} \, da = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Estabelecida a formulação integral do problema de equilíbrio à microescala, este é resolvido pelo Método dos Elementos Finitos seguindo um processo semelhante ao descrito no Capítulo 3. Serão no entanto necessárias considerações adicionais que serão detalhadas mais à frente, nomeadamente relacionadas com as condições de fronteira a aplicar na fronteira do EVR.

4.4.4 Consequências do princípio de Hill-Mandel

Por definição, a taxa do gradiente de deformação microscópico é dada por

$$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{y}, t) = \nabla_X \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) = \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t) + \nabla_X \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t), \quad (4.19)$$

em que $\dot{\mathbf{u}}$ é o campo de flutuação de velocidades e, por hipótese, é assumido que $\dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_\mu$. Substituindo esta definição na Equação (4.3) e após uma simples manipulação algébrica, conclui-se que o Princípio de Hill-Mandel impõe a verificação da seguinte condição

$$\int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}(\mathbf{y}, t) : \nabla_X \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) \, dv = 0. \quad (4.20)$$

Integrando por partes o membro esquerdo obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}(\mathbf{y}, t) : \nabla_X \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) \, dv &= \int_{\partial\Omega_\mu} \mathbf{P}(\mathbf{y}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) \, da \\ &\quad - \int_{\Omega_\mu} \operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{y}, t) \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) \, dv \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_\mu^v} \|\mathbf{P}(\mathbf{y}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})\| \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) \, da \\ &\quad - \int_{\Omega_\mu^v} \operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{y}, t) \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) \, dv, \end{aligned} \quad (4.21)$$

e considerando a formulação material da forma forte das equações de equilíbrio do EVR (4.15)² resulta simplesmente

$$\int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}(\mathbf{y}, t) : \nabla_X \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) \, dv = \int_{\partial\Omega_\mu} \bar{\mathbf{t}}_\mu(\mathbf{y}, t) \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) \, da - \int_{\partial\Omega_\mu^s} \bar{\mathbf{b}}_\mu(\mathbf{y}, t) \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) \, dv. \quad (4.22)$$

²Note-se adicionalmente que no interior dos vazios Ω_μ^v as forças de volume $\bar{\mathbf{b}}_\mu$ são nulas por definição.

Atendendo a que os dois termos da equação anterior são independentes, a condição decorrente do princípio de Hill-Mandel expressa pela Equação (4.20) é satisfeita se e só se

$$\int_{\partial\Omega_\mu} \bar{\mathbf{t}}_\mu(\mathbf{y}, t) \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) da = 0, \quad (4.23)$$

$$\int_{\partial\Omega_\mu^s} \bar{\mathbf{b}}_\mu(\mathbf{y}, t) \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) dv = 0, \quad (4.24)$$

e atendendo a que $\dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_\mu$ pode por fim escrever-se

$$\int_{\partial\Omega_\mu} \bar{\mathbf{t}}_\mu(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\eta} da = 0, \quad (4.25)$$

$$\int_{\partial\Omega_\mu^s} \bar{\mathbf{b}}_\mu(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\eta} dv = 0. \quad (4.26)$$

Conclui-se assim que as forças de volume e de tração de fronteira que atuam no EVR não são mais do que as forças de reação necessárias à imposição das restrições cinemáticas ao campo de flutuação de deslocamentos pelas condições de fronteira.

4.4.5 Definição do problema de equilíbrio à microescala

Recuperando a forma fraca das equações de equilíbrio do EVR dada pelas Equações (4.16) e (4.18), atendendo às Equações (4.25) e (4.26) e admitindo que os vazios não se encontram sujeitos a qualquer pressão interna, o problema de equilíbrio à microescala pode ser definido na formulação espacial como

Para uma dada partícula material \mathbf{x} à macroescala, conhecido o gradiente de deformação macroscópico $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ e o histórico das variáveis internas $\boldsymbol{\beta}$, encontre-se o campo de flutuação de deslocamentos admissíveis $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t)$ que satisfaça a equação

$$\int_{\varphi(\Omega_\mu)} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}, t) : \nabla_x \boldsymbol{\eta} dv = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu. \quad (4.27)$$

Analogamente, o problema de equilíbrio à microescala pode ser definido na formulação material como

Para uma dada partícula material \mathbf{x} à macroescala, conhecido o gradiente de deformação macroscópico $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ e o histórico das variáveis internas $\boldsymbol{\beta}$, encontre-se o campo de flutuação de deslocamentos admissíveis $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t)$ que satisfaça a equação

$$\int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}(\mathbf{y}, t) : \nabla_x \boldsymbol{\eta} dv = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu. \quad (4.28)$$

4.5 Homogeneização do tensor das tensões

Tendo sido adotado um procedimento de homogeneização segundo uma descrição material (ver Equação (4.2)), será igualmente considerada a homogeneização do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff. Deste modo, o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff pode escrever-se

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_{\mu_0}} \int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}(\mathbf{y}, t) \, dv, \quad (4.29)$$

e atendendo à igualdade trivial $\mathbf{I} = \mathbf{I}^T = (\nabla_X \mathbf{y})^T$ tem-se

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_{\mu_0}} \int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}(\mathbf{y}, t) (\nabla_X \mathbf{y})^T \, dv. \quad (4.30)$$

Considerando a relação (Gurtin, 1981)

$$\int_{\Omega} \mathbf{A} (\nabla \mathbf{a})^T \, dv = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{A} \mathbf{n}) \otimes \mathbf{a} \, da - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} \otimes \mathbf{a} \, dv, \quad (4.31)$$

aplicável para qualquer campo tensorial regular \mathbf{A} e campo vetorial \mathbf{a} num domínio Ω , onde \mathbf{n} denota o versor normal à fronteira $\partial\Omega$, e adicionalmente a formulação material da forma forte das equações de equilíbrio do EVR (4.15), pode por fim escrever-se

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_{\mu_0}} \left[\int_{\partial\Omega_\mu} \bar{\mathbf{t}}_\mu(\mathbf{y}, t) \otimes \mathbf{Y} \, da - \int_{\Omega_\mu^s} \bar{\mathbf{b}}_\mu(\mathbf{y}, t) \otimes \mathbf{Y} \, dv \right]. \quad (4.32)$$

O tensor das tensões de Cauchy macroscópico pode ser simplesmente obtido recordando a Equação (2.48) como

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{J} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)^T. \quad (4.33)$$

4.5.1 Homogeneização do módulo tangente consistente

Como foi referido, o retorno à macroescala requer igualmente a homogeneização do módulo tangente consistente. Em consistência com a homogeneização do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff, é considerado o módulo tangente consistente material definido por

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}}. \quad (4.34)$$

O seu cálculo pode ser realizado, por exemplo, através do Método da Condensação. Este não será aqui apresentado e pode ser consultado com detalhe nas contribuições de Miehe and Koch (2002), Kouznetsova (2002), Reis (2014) e Lopes (2016).

4.6 Condições de fronteira à microescala

Como se verifica na definição do problema de equilíbrio à microescala, a única incógnita do problema é o campo de flutuação de deslocamentos. Para além de satisfazer a forma fraca das equações de equilíbrio do EVR, tem de pertencer necessariamente ao conjunto de flutuações de deslocamentos microscópicos cinematicamente admissíveis e minimamente

restringido $\tilde{\mathcal{K}}_\mu$ e deve satisfazer as condições (4.25) e (4.26) decorrentes do Princípio de Hill-Mandel.

O tipo de condição de fronteira considerado num modelo multi-escala é um dos seus aspetos mais importantes, uma vez que o campo de deslocamentos microscópico é diretamente dependente do tipo de restrições imposto na fronteira do EVR. É assim essencial garantir uma boa conformidade com o tipo de problema, material e natureza de distribuição de heterogeneidades na microestrutura, de forma a que o modelo consiga reproduzir da melhor forma possível o comportamento real do sólido (Carvalho, 2015).

Existem quatro tipos de condições de fronteira habitualmente consideradas na literatura e que serão aqui descritos por ordem decrescente de restrição cinemática imposta ao campo de flutuação de deslocamentos:

1. Hipótese de Taylor;
2. Condição de fronteira linear;
3. Condição de fronteira periódica;
4. Condição de tração uniforme na fronteira.

4.6.1 Hipótese de Taylor

A Hipótese de Taylor é a condição mais simples e restritiva na medida em que assume a solução trivial $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{0}$ em todo o domínio Ω_μ . Decorre desta hipótese que o campo de deslocamentos à microescala é dado unicamente pela componente que depende linearmente do gradiente de deformação macroscópico imposto (ver Figura 4.3), ou seja

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}, t) = [\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{I}] \mathbf{Y}, \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_\mu. \quad (4.35)$$

Note-se que $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) \in \tilde{\mathcal{K}}_\mu$ e que as condições (4.25) e (4.26) são satisfeitas. Para além disso, devido à maior restrição possível dos deslocamentos, a Hipótese de Taylor tende a sobrestimar a rigidez do material e não é capaz de caracterizar as interações mecânicas entre diferentes heterogeneidades do EVR.

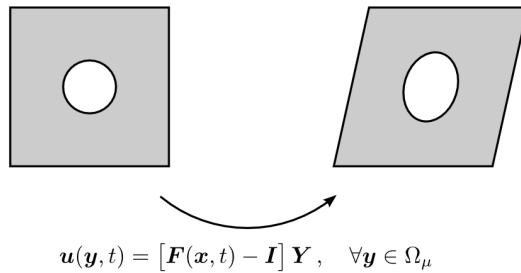


Figura 4.3: Representação esquemática da Hipótese de Taylor.

O conjunto de flutuações de deslocamentos microscópicos cinematicamente admissíveis e restringidos pela Hipótese de Taylor pode então ser definido como

$$\tilde{\mathcal{K}}_\mu^{\text{Taylor}} = \left\{ \tilde{\mathbf{u}}, \text{ suficientemente regular } \left| \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_\mu \right. \right\}. \quad (4.36)$$

4.6.2 Condição de fronteira linear

A condição de fronteira linear impõe que o campo de flutuação de deslocamentos é nulo na fronteira do EVR, ou seja

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{y} \in \partial\Omega_\mu. \quad (4.37)$$

Decorre desta hipótese que na fronteira do EVR o campo de deslocamentos à microescala é dado unicamente pela componente que depende linearmente do gradiente de deformação macroscópico imposto (ver Figura 4.4), ou seja

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}, t) = [\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{I}] \mathbf{Y}, \quad \forall \mathbf{y} \in \partial\Omega_\mu. \quad (4.38)$$

Note-se que $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) \in \tilde{\mathcal{K}}_\mu$ e que a condição (4.25) é satisfeita. A condição (4.26) apenas é satisfeita na ausência de forças de volume e acelerações.

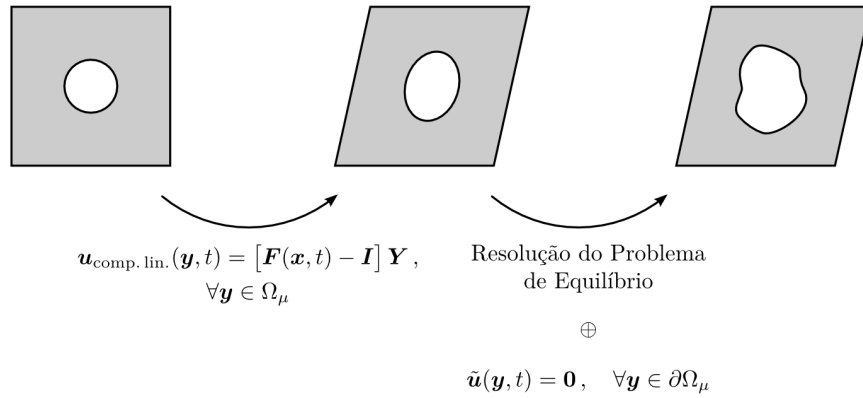


Figura 4.4: Representação esquemática da condição de fronteira linear.

O conjunto de flutuações de deslocamentos microscópicos cinematicamente admissíveis e restringidos pela condição de fronteira linear pode então ser definido como

$$\tilde{\mathcal{K}}_\mu^{\text{Linear}} = \left\{ \tilde{\mathbf{u}}, \text{ suficientemente regular } \left| \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{y} \in \partial\Omega_\mu \right. \right\}. \quad (4.39)$$

4.6.3 Condição de fronteira periódica

A condição de fronteira periódica trata-se de uma das mais utilizadas na comunidade científica, em particular no que diz respeito a estudos micromecânicos. A sua popularidade deve-se ao facto de permitir que as quantidades homogeneizadas converjam mais rápido para o seus valores reais com o aumento do tamanho do EVR (Terada et al., 2000; Kanit et al., 2003) e de apresentar uma excelente capacidade de reproduzir o comportamento de materiais que apresentem uma estrutura periódica (ou quase-periódica).

A ideia basilar desta condição de fronteira é que a microestrutura é reproduzida por um padrão de EVR repetidos e, consequentemente, os deslocamentos em lados opostos da

fronteira do EVR têm de ser compatíveis. Note-se porém que não é necessário que as heterogeneidades e singularidades do EVR apresentem uma distribuição periódica.

Considere-se então que a fronteira do EVR, $\partial\Omega_\mu$, se encontra dividida em d grupos iguais $\partial\Omega_{\mu,i}$ tal que

$$\partial\Omega_\mu = \bigcup_{i=1}^d \partial\Omega_{\mu,i}, \quad \partial\Omega_{\mu,i} = (\Gamma_i^- \cup \Gamma_i^+). \quad (4.40)$$

Significa isto que em cada grupo $\partial\Omega_{\mu,i}$, cada ponto da parte positiva $\mathbf{y}^+ \in \Gamma_i^+$ tem o seu par na parte negativa $\mathbf{y}^- \in \Gamma_i^-$ em lados opostos do EVR. Note-se ainda que os versores \mathbf{n}^+ e \mathbf{n}^- respetivamente normais a Γ_i^+ e Γ_i^- nos pontos \mathbf{y}^+ e \mathbf{y}^- devem satisfazer a condição

$$\mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^-. \quad (4.41)$$

Atendendo a estas condições e considerando a totalidade da fronteira do EVR, demonstra-se que $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) \in \tilde{\mathcal{K}}_\mu$ se e só se

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}^+, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}^-, t), \quad (4.42)$$

ou seja, a condição de fronteira periódica impõe que o campo de flutuação de deslocamentos seja igual na parte positiva e negativa da fronteira (ver Figura 4.5). A condição (4.26) apenas é satisfeita na ausência de forças de volume e acelerações e, neste caso, a condição (4.26) apenas é satisfeita se o campo de trações de fronteira for anti-periódico, ou seja

$$\bar{\mathbf{t}}_{\mu,i}(\mathbf{y}^+, t) = -\bar{\mathbf{t}}_{\mu,i}(\mathbf{y}^-, t). \quad (4.43)$$

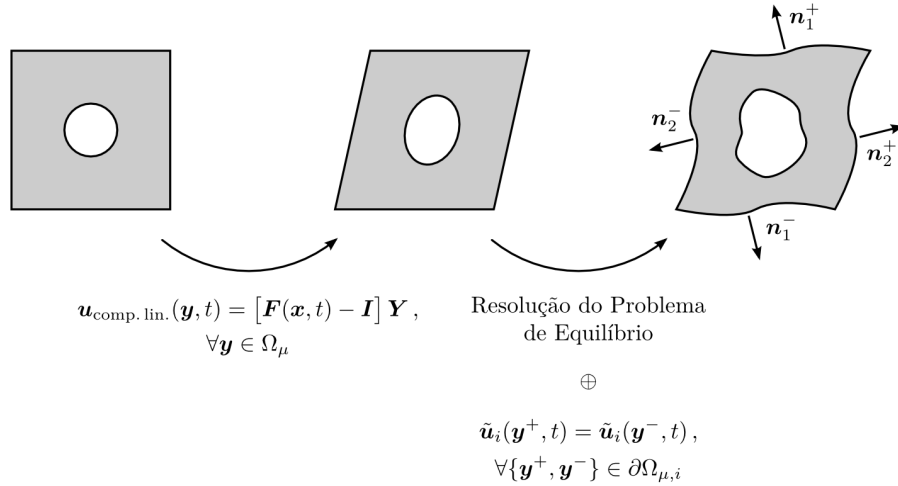


Figura 4.5: Representação esquemática da condição de fronteira periódica.

O conjunto de flutuações de deslocamentos microscópicos cinematicamente admissíveis e restringidos pela condição de fronteira periódica pode então ser definido como

$$\mathcal{K}_\mu^{\text{Periódica}} = \left\{ \tilde{\mathbf{u}}, \text{ suficientemente regular } \left| \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{y}^+, t) = \tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{y}^-, t), \\ \forall \partial\Omega_{\mu,i} \wedge \forall \{\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-\} \in \partial\Omega_{\mu,i} \end{array} \right. \right\}. \quad (4.44)$$

4.6.4 Condição de tração uniforme na fronteira

Em contraste com a Hipótese de Taylor, a condição de tração uniforme na fronteira é a condição de fronteira menos restritiva e impõe simplesmente que o campo de flutuação de deslocamentos satisfaça a condição de restrição mínima definida pela Equação (4.13) (ver Figura 4.6). O conjunto de flutuações de deslocamentos microscópicos cinematicamente admissíveis e restringidos pela condição de tração uniforme na fronteira é, deste modo, coincidente com o conjunto de flutuações de deslocamentos microscópicos cinematicamente admissíveis e minimamente restringido

$$\mathcal{K}_\mu^{\text{Tração}} \equiv \mathcal{K}_\mu = \left\{ \tilde{\mathbf{u}}, \text{ suficientemente regular } \left| \int_{\partial\Omega_\mu} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{Y}) da = \mathbf{0} \right. \right\}. \quad (4.45)$$

À semelhança das condições anteriores, a condição (4.26) apenas é satisfeita na ausência de forças de volume e acelerações. Adicionalmente, da condição (4.25) conclui-se que a tração (ou tensão resultante) ao longo da fronteira do EVR é uniforme e igual à tração da tensão homogeneizada tal que

$$\mathbf{P}(\mathbf{y}, t) \mathbf{n}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{y}, t), \quad (4.46)$$

justificando-se assim a designação de condição de tração uniforme na fronteira.

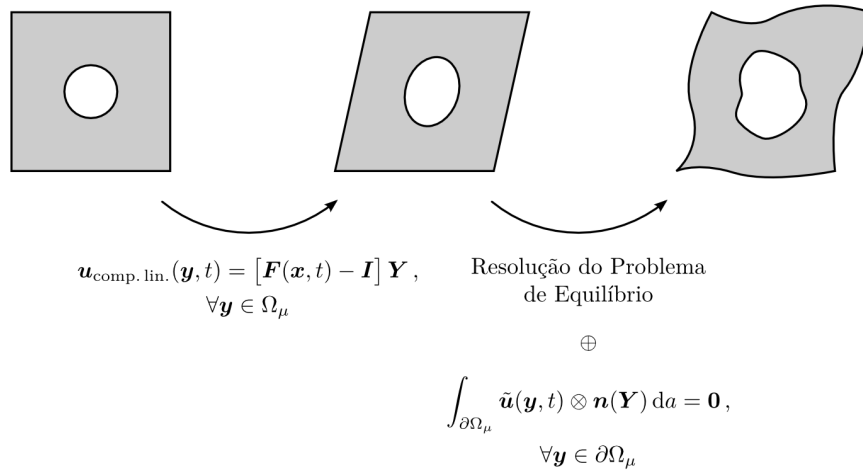


Figura 4.6: Representação esquemática da condição de tração uniforme na fronteira.

4.7 Aplicação do Método dos Elementos Finitos

No Capítulo 3 foram descritos os aspetos essenciais da aplicação do Método dos Elementos Finitos na resolução de um problema mecânico quasi-estático não-linear de valor de fronteira inicial. No programa utilizado, também o problema de equilíbrio à microescala definido pela Equação (4.27) é resolvido através do Método dos Elementos Finitos, pelo que neste subcapítulo se pretende apresentar sucintamente as diferentes etapas percorridas.

A formulação integral do problema de equilíbrio à microescala foi já deduzida e é definida pelas Equações (4.27) e (4.28), segundo uma descrição espacial e material, respetivamente. Por uma questão de brevidade será apenas considerada a formulação material, sendo a formulação espacial obtida com facilidade segundo um processo totalmente análogo ao descrito no Capítulo 3.

4.7.1 Discretização temporal

No que diz respeito ao problema de equilíbrio à microescala, a estratégia de resolução incremental consiste essencialmente em duas etapas:

1. Discretização do gradiente de deformação macroscópico imposto ao EVR num conjunto finito de incrementos;
2. Resolução do problema de equilíbrio microscópico em cada um dos incrementos até que seja aplicada a totalidade do gradiente de deformação macroscópico.

Considerando o incremento temporal genérico $[t_n, t_{n+1}]$, o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff microscópico no instante t_{n+1} é dado por

$$\mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{y}) = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}_{n+1}(\mathbf{y}), \beta_n(\mathbf{y})), \quad (4.47)$$

em que $\hat{\mathbf{P}}$ é o funcional constitutivo incremental de acordo com o modelo constitutivo considerado, $\mathbf{F}_{n+1}(\mathbf{y})$ é o gradiente de deformação microscópico prescrito no instante t_{n+1} e $\beta_n(\mathbf{y})$ é o conjunto de variáveis internas conhecido no instante t_n .

Atendendo ao conceito de homogeneização já introduzido, o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff homogeneizado é dado por

$$\mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_{\mu_0}} \int_{\Omega_\mu} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}_{n+1}(\mathbf{y}), \beta_n(\mathbf{y})) dv, \quad (4.48)$$

e de acordo com a definição material do gradiente de deformação pode escrever-se

$$\mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_{\mu_0}} \int_{\Omega_\mu} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{I} + \nabla_X \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{y}), \beta_n(\mathbf{y})) dv. \quad (4.49)$$

Desenvolvendo explicitamente o termo $\nabla_X \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{y})$ é trivial verificar que

$$\mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_{\mu_0}} \int_{\Omega_\mu} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}_{n+1} + \nabla_X \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{y}), \beta_n(\mathbf{y})) dv. \quad (4.50)$$

Deste modo, o problema incremental de equilíbrio à microescala definido pela Equação (4.28) é dada por

$$\int_{\Omega_\mu} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}_{n+1} + \nabla_X \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{y}), \beta_n(\mathbf{y})) : \nabla \boldsymbol{\eta} dv = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu. \quad (4.51)$$

4.7.2 Discretização espacial

Em termos formais, a primeira etapa da discretização espacial do problema de equilíbrio à microescala consiste na discretização dos domínios Ω_μ e \mathcal{V}_μ , os quais irão tomar respetivamente as suas formas discretizadas ${}^h\Omega_\mu$ e ${}^h\mathcal{V}_\mu$.

A substituição de Ω_μ e \mathcal{V}_μ por ${}^h\Omega_\mu$ e ${}^h\mathcal{V}_\mu$ na Equação (4.51) resulta em

$$\int_{{}^h\Omega_\mu} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}_{n+1} + \nabla_X \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{y}), \beta_n(\mathbf{y})) \mathbf{G}^g \cdot \boldsymbol{\eta} \, dv = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in {}^h\mathcal{V}_\mu, \quad (4.52)$$

equação que pode ser reescrita como

$$\left[\int_{{}^h\Omega_\mu} (\mathbf{G}^g)^T \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}_{n+1} + \nabla_X \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{y}), \beta_n(\mathbf{y})) \, dv \right]^T \cdot \boldsymbol{\eta} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in {}^h\mathcal{V}_\mu. \quad (4.53)$$

Dado que a equação anterior deve ser satisfeita para qualquer vetor $\boldsymbol{\eta} \in {}^h\mathcal{V}$, o problema incremental discretizado à microescala é definido por

$$\mathbf{f}^{\text{int}}(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{y})) = \mathbf{0}, \quad (4.54)$$

equação que traduz o equilíbrio de forças internas no EVR, sendo estas dadas por

$$\mathbf{f}^{\text{int}}(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{y})) = \int_{{}^h\Omega_\mu} (\mathbf{G}^g)^T \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}_{n+1} + \nabla_X \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{y}), \beta_n(\mathbf{y})) \, dv. \quad (4.55)$$

4.7.3 Método de Newton-Raphson

Após a linearização da Equação (4.54), a iteração genérica (k) do Método de Newton-Raphson consiste em resolver o sistema de equações lineares

$$\mathbf{f}^{\text{int}}(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{y}))^{(k-1)} + \mathbf{K}_T(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{y}))^{(k-1)} \delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y})^{(k)} = \mathbf{0}, \quad (4.56)$$

em ordem a $\delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y})^{(k)}$, em que \mathbf{K}_T é a matriz de rigidez tangente global do EVR dada por

$$\mathbf{K}_T^{(k-1)} = \int_{{}^h\Omega_\mu} (\mathbf{G}^g)^T \mathbf{A} \mathbf{G}^g \, dv, \quad (4.57)$$

em que o tensor de \mathbf{A} é o módulo tangente consistente material. Após a resolução do sistema de equações lineares e determinação da solução $\delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y})^{(k)}$, o vetor global de flutuações de deslocamentos nodais microscópico é atualizado de acordo com

$$\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^{(k)} = \tilde{\mathbf{u}}_n + \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{(k)}, \quad (4.58)$$

em que o vetor incremental das flutuações de deslocamentos nodais microscópico é dado por

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}^{(k)} = \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{(k-1)} + \delta \tilde{\mathbf{u}}^{(k)}. \quad (4.59)$$

4.7.4 Imposição das condições de fronteira

No caso do problema de equilíbrio à microescala é importante notar que a Equação (4.54) não inclui nenhuma consideração relativa ao tipo de condição de fronteira aplicado no EVR. Por este motivo, na resolução do problema pelo Método dos Elementos Finitos é necessário incorporar de algum modo as restrições associadas às condições de fronteira no algoritmo numérico. Um dos métodos possíveis consiste na imposição das restrições no sistema de equações de equilíbrio através dos Multiplicadores de Lagrange (Miehe, 2002). No entanto, Reis (2014) concluiu que neste contexto um outro método mais recente, designado por Método da Condensação, é mais eficiente do ponto de vista computacional. Sucintamente, este método envolve a eliminação de linhas e colunas do sistema de equações de equilíbrio global associadas aos graus de liberdade prescritos, em função da condição de fronteira considerada.

Tendo em conta os objetivos da presente dissertação, entende-se não ser relevante apresentar aqui o procedimento de implementação numérico das condições de fronteira. Informação detalhada sobre esta implementação pode ser consultada em Reis (2014) e Lopes (2016).

Capítulo 5

Programa LINKS e Implementações Computacionais

5.1 Introdução

Os objetivos estabelecidos na presente dissertação requerem uma avançada capacidade de análise computacional através do Método dos Elementos Finitos. O programa LINKS (Large Strain Implicit Non-Linear Finite Element Analysis of Solids Linking Scales) foi implementado no seio da equipa de investigação CM2S, liderada pelo Professor Doutor Francisco Andrade Pires, e tem sido desenvolvido ao longo dos últimos anos a partir da contribuição de diversos investigadores da área da mecânica computacional. Atualmente o programa inclui um grande conjunto de modelos materiais constitutivos e permite analisar diversos tipos de problemas, nomeadamente problemas bidimensionais (estado plano de tensão, estado plano de deformação e axissimetria) e problemas tridimensionais, considerando grandes deformações. Para além disso destacam-se as capacidades do programa em realizar análises *standard* à macroescala e análises micromecânicas e multi-escala baseadas em homogeneização computacional. Apesar de todas elas serem exploradas no âmbito da presente dissertação, deve destacar-se que a capacidade de análise multi-escala foi inicialmente implementada por Reis (2014), com base na formulação de de Souza Neto and Feijóo (2006) e Vaz et al. (2011) e significativamente melhorada em termos computacionais por Lopes (2016). Também o recente desenvolvimento da capacidade de *output* por parte do Doutor Daniel de Bortoli é de importância indiscutível.

Para obter os resultados pretendidos foi necessário realizar duas implementações computacionais no programa LINKS. Estas implementações estão relacionadas com a capacidade de pós-processamento do programa em todos os tipos de análise e com a aplicação do gradiente de deformação nas análises micromecânicas.

Neste capítulo pretende-se em primeiro lugar apresentar uma descrição essencialmente esquemática do programa LINKS. Em particular, é dado destaque às suas capacidades de análise à macroescala e de análise multi-escala, notando que a capacidade de análise micromecânica é em quase tudo idêntica à componente microscópica da implementação multi-

escala. Note-se que não se pretende aqui apresentar quaisquer detalhes de implementação computacional, mas sim enquadrar o programa utilizado com o conteúdo exposto nos capítulos anteriores e com as simulações numéricas apresentadas posteriormente. Em segundo lugar é apresentada uma descrição das duas implementações computacionais realizadas.

5.2 Descrição do programa LINKS

5.2.1 Análise à macroescala

Em relação a uma análise à macroescala, a solução de um problema estrutural no programa LINKS é perfeitamente *standard* no que diz respeito à aplicação do Método dos Elementos Finitos, permitindo análises em pequenas e grandes deformações. A estrutura do programa encontra-se esquematizada na Figura 5.1 em formato de pseudo-código e é de seguida sucintamente descrita.

A primeira macroetapa do programa resume-se à leitura dos dados de entrada e à alocação e inicialização de variáveis. Nesta etapa, todos os dados relevantes, como o tipo de problema, a topologia da malha (conectividades, coordenadas nodais e tipos de elementos e materiais), propriedades dos materiais (de acordo com o respetivo modelo constitutivo) e condições de fronteira, são lidos a partir do ficheiro de entrada. Também é nesta etapa que são lidas as condições de carregamento da estrutura, bem como os parâmetros de incrementação, sendo assembled o vetor global das forças externas aplicadas. A segunda macroetapa consiste no corpo principal do programa e diz respeito ao procedimento numérico de resolução do problema de equilíbrio. Esta etapa é composta por um ciclo incremental exterior, no qual são percorridos todos os incrementos de carga da estrutura, e por um ciclo iterativo interior onde é resolvido o problema de equilíbrio em cada instante incremental. No procedimento de controlo do ciclo de incrementação é realizada a incrementação das forças externas aplicadas e dos deslocamentos prescritos na estrutura. Para cada instante de tempo incremental, o problema de equilíbrio é resolvido iterativamente através do Método de Newton-Raphson e envolve as principais etapas do processo numérico de resolução: assemblagem e resolução do sistema de equações de equilíbrio, atualização dos deslocamentos nodais e do gradiente de deformação, atualização das tensões e das variáveis internas, cálculo do módulo tangente consistente espacial, cálculo da matriz de rigidez tangente global, cálculo do vetor global das forças internas e atualização do vetor global das forças residuais. Se de acordo com um determinado critério adotado a solução numérica convergiu, então o programa devolve o *output* dos resultados obtidos nesse incremento e prossegue para o incremento seguinte. Caso a solução não tenha convergido, o programa prossegue o processo iterativo do Método de Newton-Raphson. Após percorridos todos os incrementos de carga a análise do problema à macroescala está concluída.

5.2.2 Análise multi-escala baseada em homogeneização computacional

Em relação a uma análise multi-escala baseada em homogeneização computacional, a estrutura respeitante ao domínio macroscópico é semelhante à apresentada no subcapítulo anterior. Também a estrutura de análise à microescala é no geral semelhante e a sua compreensão não oferece dificuldades. A conexão entre ambas as escalas é efetuada numa rotina de interface entre a macro e a microescala e ocorre quando o vetor global das forças in-

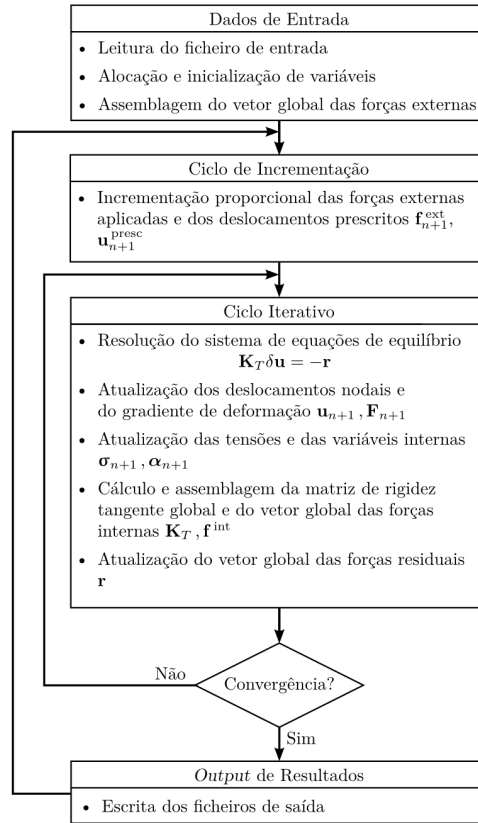


Figura 5.1: Estrutura do programa LINKS para uma análise à macroescala de um problema estrutural pelo Método dos Elementos Finitos.

ternas é calculado. Por conveniência numérica é também nesta interface que é calculada a matriz de rigidez tangente global. A estrutura do programa encontra-se esquematizada na Figura 5.2 em formato de pseudo-código e é de seguida sucintamente descrita.

Na rotina de interface macro-micro é realizado o ciclo sobre todos os elementos à macroescala e, para cada ponto de integração de Gauss, é calculado o gradiente de deformação macroscópico que será imposto ao EVR à microescala. Neste ponto inicia-se a análise do problema à microescala, sendo o gradiente de deformação o dado de entrada proveniente da macroescala. Note-se porém que o ficheiro de entrada que contém todos os dados relevantes do problema microscópico é lido uma única vez juntamente com o ficheiro de entrada macroscópico. No procedimento de controlo do ciclo incremental é realizada a incrementação da componente linear do campo de deslocamentos microscópico com base no gradiente de deformação macroscópico incremental. Para cada instante de tempo incremental, o problema de equilíbrio à microescala é resolvido iterativamente utilizando novamente o Método de Newton-Raphson. À semelhança do cálculo realizado à macroescala, a matriz de rigidez tangente global do EVR é calculada com base no módulo tangente consistente espacial. Se a solução numérica convergiu, então o programa prossegue para o incremento seguinte, caso

contrário retoma o processo iterativo do Método de Newton-Raphson. Após percorridos todos os incrementos, o módulo tangente consistente material homogeneizado e o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff homogeneizado são passados para a rotina de interface. Ainda no ponto de integração de Gauss em consideração, é calculado o módulo tangente consistente espacial e o tensor das tensões de Cauchy, a partir dos quais são posteriormente calculados e assemblados o vetor global das forças internas e a matriz de rigidez tangente global. Estes tensores são por último passados para a macroescala e a resolução do problema prossegue como já foi descrito.

Tal como referido previamente, a capacidade de análise micromecânica é em tudo semelhante à componente microscópica da implementação multi-escala (ver terceira coluna da Figura 5.2). Porém, neste caso é necessário especificar no ficheiro de entrada o gradiente de deformação total a ser imposto, dado que tal análise é ‘desligada’ da macroescala. Neste sentido, também a homogeneização do módulo tangente consistente deixa de ser necessária.

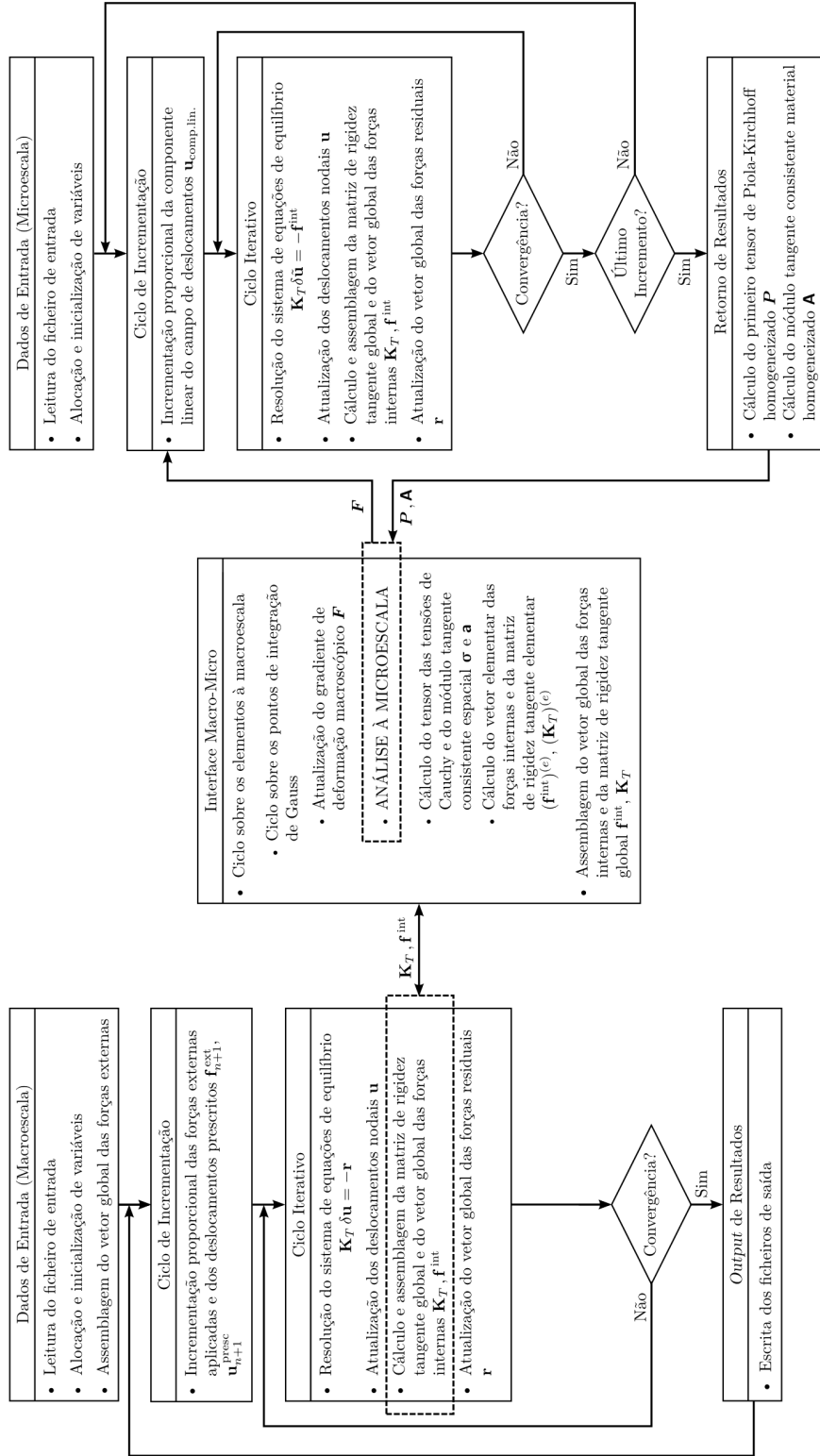


Figura 5.2: Estrutura do programa LINKS para uma análise multi-escala de um problema estrutural pelo Método dos Elementos Finitos.

5.3 Implementação computacional 1: pós-processamento

Em termos de pós-processamento, para além das quantidades *standard* como os deslocamentos, deformações, tensões e forças de reação, o programa LINKS gera como *output* as variáveis internas dos modelos materiais constitutivos utilizados. No entanto, para realizar as análises pretendidas foi necessário implementar uma subrotina de pós-processamento responsável pelo cálculo e *output* de um conjunto específico de quantidades relevantes:

- Deformação total equivalente acumulada;
- Triaxialidade de tensões (ou simplesmente triaxialidade);
- Parâmetro do ângulo de Lode;
- Fração volúmica de vazios (ou porosidade).

Antes de descrever a sua implementação computacional, as quantidades mencionadas são aqui apresentadas. A sua importância no contexto dos estudos realizados nesta dissertação é evidenciada no capítulo seguinte, pretendendo-se aqui somente realizar a sua devida introdução teórica.

5.3.1 Deformação total equivalente acumulada

Como medida de deformação optou-se por considerar a deformação total equivalente acumulada, $\bar{\varepsilon}$. Esta será calculada com base no tensor das deformações de Hencky, $\mathbf{E}_d^{(0)}$, como

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{E}_d^{(0)}\|, \quad (5.1)$$

em que $\mathbf{E}_d^{(0)}$ é a componente desviadora do tensor das deformações de Hencky definida por

$$\mathbf{E}_d^{(0)} = \mathbf{E}^{(0)} - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{E}^{(0)}, \quad (5.2)$$

e a sua norma é dada por

$$\|\mathbf{E}_d^{(0)}\| = \sqrt{\mathbf{E}_d^{(0)} : \mathbf{E}_d^{(0)}}. \quad (5.3)$$

Note-se que é considerada somente a componente desviadora do tensor de Hencky para manter a consistência com o cálculo da tensão equivalente de von Mises. Tal como descrito em seguida, esta última grandeza é utilizada na definição da triaxialidade de tensões.

5.3.2 Triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode

Por definição, no caso de um material isotrópico a resposta do material é idêntica para qualquer rotação do sistema de coordenadas cartesianas. Assim sendo, considerando uma descrição espacial, o estado de tensão arbitrário num ponto do sólido $\boldsymbol{\sigma}$ pode ser representado pelas tensões principais σ_1 , σ_2 e σ_3 , sendo aqui assumido que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Alternativamente, o estado de tensão pode ser unicamente definido através de três invariantes do tensor das tensões de Cauchy, nomeadamente pela pressão hidrostática ou tensão média

$$p = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I} = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}, \quad (5.4)$$

pela tensão equivalente (ou efetiva) de Von Mises

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{\sigma}_d}, \quad (5.5)$$

e pelo terceiro invariante das tensões desviadoras

$$J_3 = \det \boldsymbol{\sigma}_d. \quad (5.6)$$

Por conveniência, o estado de tensão não será no entanto caracterizado por estes três invariantes mas sim através de duas razões entre os mesmos que permitem definir dois parâmetros adimensionais:

- (i) A triaxialidade resulta da adimensionalização da pressão hidrostática e é definida por

$$T = \frac{p}{\bar{\sigma}}. \quad (5.7)$$

Como será visto no capítulo seguinte, desde os primeiros estudos micromecânicos publicados na área da fratura dúctil, este parâmetro tem sido extensivamente utilizado na literatura.

- (ii) O segundo parâmetro foi introduzido mais recentemente no estudo da fratura dúctil e consiste no parâmetro de Lode (ou de forma equivalente o ângulo de Lode, θ) dado por

$$L = -\cos(3\theta). \quad (5.8)$$

Diversos autores consideram porém variações alternativas deste parâmetro. Dado que parte dos estudos realizados nesta dissertação são baseados nos trabalhos de Bao (2003), Bao and Wierzbicki (2004), Bai and Wierzbicki (2008) e Bai (2008), optou-se por considerar o que os autores mencionados designaram por parâmetro do ângulo de Lode, definido por

$$\bar{\theta} = 1 - \frac{6\theta}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \xi, \quad (5.9)$$

em que θ é o ângulo de Lode ($0 \leq \theta \leq \pi/3$) e ξ é o terceiro invariante das tensões desviadoras normalizado (Bai and Wierzbicki, 2015) definido por

$$\xi = \cos(3\theta) = \frac{27}{2} \frac{J_3}{\bar{\sigma}^3}. \quad (5.10)$$

Dada a gama de variação do ângulo de Lode, ξ varia na gama $-1 \leq \xi \leq 1$ e para $\bar{\theta}$ temos $-1 \leq \bar{\theta} \leq 1$.

Para compreender com maior facilidade o significado dos dois parâmetros adimensionais introduzidos, é possível observar, na Figura 5.3, a representação do estado de tensão de um ponto P no sistema de coordenadas cartesiano $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. É imediato notar que o mesmo estado de tensão pode ser definido considerando o sistema de coordenadas cilíndricas $(p, \bar{\sigma}, \theta)$, o qual está diretamente relacionado com a triaxialidade e com o parâmetro do ângulo de Lode. Atendendo ao detalhe do plano desviador (ou plano II) representado na Figura 5.4,

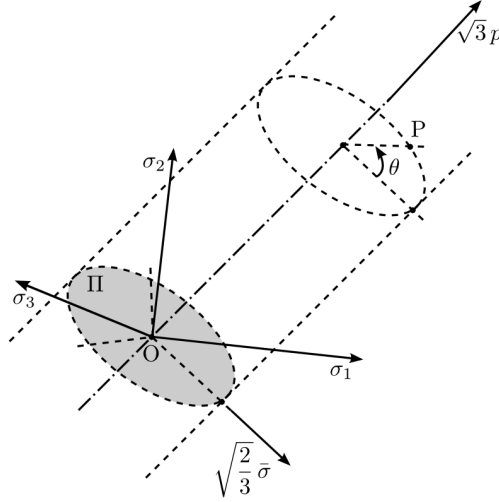


Figura 5.3: Representação do estado de tensão de um ponto P no espaço tridimensional das tensões principais.

por considerações geométricas verifica-se de forma trivial que as tensões principais de desvio podem ser expressas por

$$\begin{cases} \sigma_{d,1} = \frac{2}{3} \bar{\sigma} \cos \theta \\ \sigma_{d,2} = \frac{2}{3} \bar{\sigma} \cos \left(\frac{2}{3}\pi - \theta \right) \\ \sigma_{d,3} = \frac{2}{3} \bar{\sigma} \cos \left(\frac{4}{3}\pi - \theta \right) \end{cases}, \quad (5.11)$$

e as tensões principais por

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{d,1} + p = \left[1 + \frac{2}{3T} \cos \theta \right] p \\ \sigma_2 = \sigma_{d,2} + p = \left[1 + \frac{2}{3T} \cos \left(\frac{2}{3}\pi - \theta \right) \right] p \\ \sigma_3 = \sigma_{d,3} + p = \left[1 + \frac{2}{3T} \cos \left(\frac{4}{3}\pi - \theta \right) \right] p \end{cases}. \quad (5.12)$$

Do ponto de vista físico, o valor de triaxialidade permite inferir acerca da magnitude relativa das tensões normais face às tensões de corte num determinado estado de tensão. Também o seu sinal dependerá essencialmente se se trata de um estado dominante de tração ou de compressão. Verifica-se facilmente que um estado de tração uniaxial, um estado de desvio (ou corte) e um estado de compressão uniaxial correspondem respetivamente a valores de triaxialidade $T = 1/3$, $T = 0$ e $T = -1/3$. Podem assim distinguir-se diferentes regimes de triaxialidade:

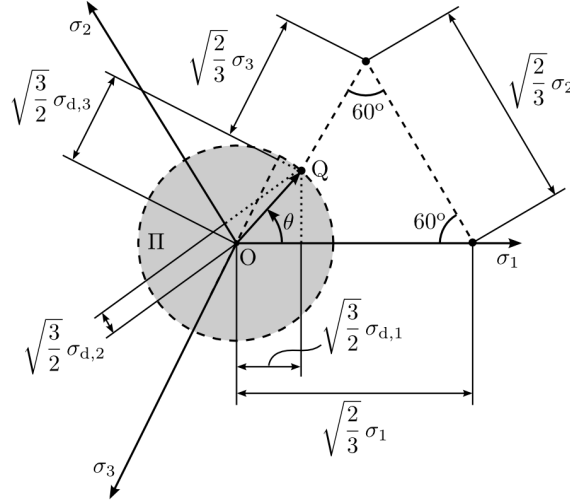


Figura 5.4: Representação do estado de tensão de um ponto Q no plano desviador (ou plano Π).

- Alta triaxialidade em tração ($T \geq 1/3$);
- Baixa triaxialidade em tração ($0 \leq T \leq 1/3$);
- Baixa triaxialidade em compressão ($-1/3 \leq T \leq 0$);
- Alta triaxialidade em compressão ($T \leq -1/3$).

Os estados de tensão iniciais encontrados em provetes experimentais, utilizados em ensaios de plasticidade e fratura, podem ser unicamente caracterizados pelo par de parâmetros $(T, \bar{\theta})$ (Bai, 2008). As expressões analíticas que definem ambos os parâmetros em função de quantidades diretamente mensuráveis podem ser consultadas na Tabela 3.1 em Bai (2008).

Para o caso de estado plano de tensão, de enorme interesse em análise experimental de tensões, foi demonstrado por Wierzbicki and Xue (2005) que a condição $\sigma_3 = 0$ permite determinar uma relação única entre T e $\bar{\theta}$ dada por

$$\cos \left[\frac{\pi}{2} (1 - \bar{\theta}) \right] = -\frac{27}{2} T \left(T^2 - \frac{1}{3} \right). \quad (5.13)$$

A curva associada à equação anterior encontra-se representada na Figura 5.5, onde são indicados os pontos correspondentes aos estados de tensão iniciais de diferentes provetes. Esta representação permite adquirir alguma sensibilidade física para os regimes de triaxialidade já indicados.

Também o parâmetro de Lode pode ser interpretado do ponto de vista físico com relativa simplicidade. Após manipulação algébrica das equações em (5.12), as tensões principais

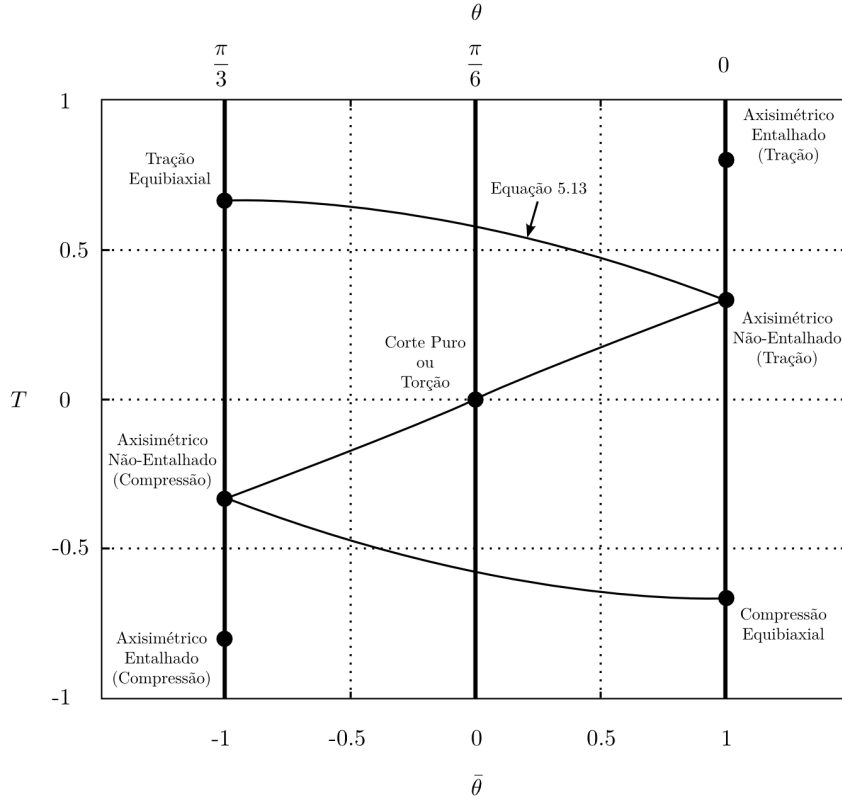


Figura 5.5: Representação de alguns estados de tensão iniciais associados a provetes experimentais, utilizados em ensaios de plasticidade e fratura.

podem ser adimensionalizadas como

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} = \cos \theta + \frac{3}{2} p \\ \frac{3}{2} \frac{\sigma_2}{\bar{\sigma}} = \cos \left(\frac{2}{3} \pi - \theta \right) + \frac{3}{2} p \\ \frac{3}{2} \frac{\sigma_3}{\bar{\sigma}} = \cos \left(\frac{4}{3} \pi - \theta \right) + \frac{3}{2} p \end{cases} \quad (5.14)$$

Na Figura 5.6 encontra-se uma representação gráfica da evolução das tensões principais adimensionalizadas em função do parâmetro do ângulo de Lode, considerando um valor de triaxialidade nulo. Note-se que neste caso temos $p = 0$ e o estado de tensão encontra-se no plano desviador representado na Figura 5.4. Um valor de triaxialidade não nulo pode então ser entendido como a sobreposição de um estado de tensão hidrostático (afastamento do plano desviador) e, no que diz respeito à Figura 5.6, resulta simplesmente numa translação vertical das curvas para cima ($T > 0$) ou para baixo ($T < 0$). Deste modo, para o caso geral de $T \neq 0$, podem identificar-se três valores particulares do parâmetro do ângulo de Lode:

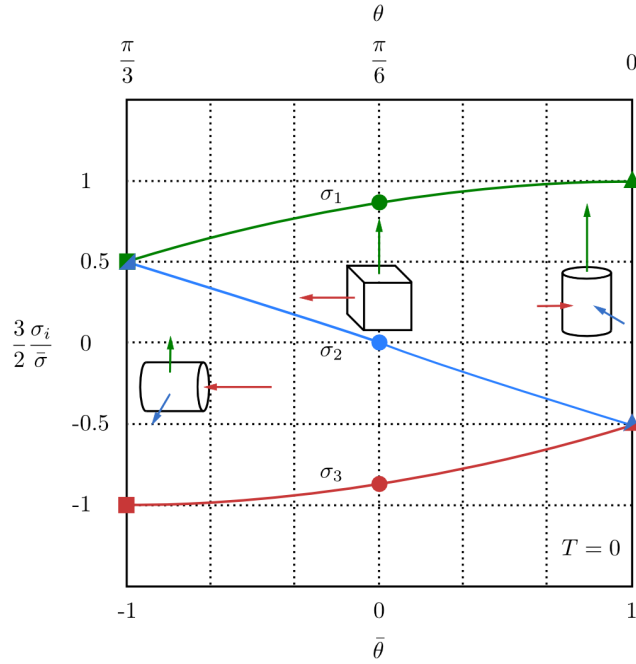


Figura 5.6: Representação das tensões principais adimensionais $3\sigma_i/(2\bar{\sigma})$, $i = 1, 2, 3$, em função do parâmetro do ângulo de Lode para $T = 0$.

- Para $\bar{\theta} = 1$ ($\theta = 0$) tem-se um estado axissimétrico de tração generalizado (tração axisimétrica com compressão biaxial) sobreposto com um estado de tensão hidrostático;
- Para $\bar{\theta} = 0$ ($\theta = \pi/6$) tem-se um estado de corte generalizado sobreposto com um estado de tensão hidrostático;
- Para $\bar{\theta} = -1$ ($\theta = \pi/3$) tem-se um estado axissimétrico de compressão generalizado (compressão axisimétrica com tração biaxial) sobreposto com um estado de tensão hidrostático.

Com base nestes conceitos, a Figura 5.5 pode agora ser revisitada e compreendida na sua totalidade. Outras abordagens deste assunto baseadas no círculo de Mohr ou em razões adimensionais de tensões principais podem ser encontradas nas contribuições de Barsoum and Faleskog (2007a) e Nahshon and Hutchinson (2008).

Em termos gerais, à medida que a simulação numérica de um determinado ensaio experimental decorre, o estado de tensão num dado ponto de integração de Gauss varia com a incrementação de carregamento (forças externas aplicadas e/ou deslocamentos prescritos). Por este motivo, também a triaxialidade e o parâmetro do ângulo de Lode variam ao longo do procedimento incremental. Em termos de análise dos resultados, poderá ser interessante conhecer os valores médios destes parâmetros ao longo de toda a simulação. Com base em Bai (2008), a triaxialidade e o parâmetro de Lode médios serão determinados respetivamente

como

$$T_{\text{med}} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_f} \int_0^{\bar{\varepsilon}_f} T(\bar{\varepsilon}_f) d\bar{\varepsilon}, \quad (5.15)$$

$$\bar{\theta}_{\text{med}} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_f} \int_0^{\bar{\varepsilon}_f} T(\bar{\varepsilon}_f) d\bar{\varepsilon}, \quad (5.16)$$

em que $\bar{\varepsilon}_f$ é o valor da deformação total equivalente acumulada correspondente ao instante final da simulação.

5.3.3 Porosidade

A fração volúmica de vazios (ou porosidade), f , é a única variável de dano do modelo de Gurson (descrito no capítulo seguinte). Enquanto numa análise à macroescala tal variável é diretamente obtida através do modelo constitutivo, nas análises micromecânicas e multi-escala que serão realizadas é necessário implementar o seu cálculo ao nível do EVR. Para maior facilidade de compreensão, o procedimento de cálculo desta variável é apresentado no Capítulo 8 juntamente com os parâmetros de simulação numérica das análises multi-escala.

5.3.4 Subrotina GPVARSOUT

A rotina de pós-processamento implementada designa-se por GPVARSOUT (Gauss Point VARIABLE S OUTput) e, a menos de algumas particularidades, é geral para todos os tipos de análise. Nos casos de uma análise à macroescala ou multi-escala, devem ser especificados no ficheiro de entrada o número total de pontos de integração de Gauss macroscópicos que se pretende analisar e a sua identificação individual (número do ponto de integração de Gauss e elemento a que pertence). Numa análise micromecânica apenas é considerado um EVR, pelo que tal especificação não é necessária.

As principais etapas da subrotina GPVARSOUT encontram-se descritas na Caixa 5.1 em formato de pseudo-código. Para cada ponto de integração de Gauss macroscópico que se pretende analisar, o programa escreve um ficheiro que contém a identificação do ponto (número do ponto de Gauss, elemento a que pertence e coordenadas cartesianas na configuração de referência) e as quantidades pretendidas em cada incremento pseudo-temporal (porosidade, deformação total equivalente acumulada, triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode). No caso de uma análise micromecânica, estas quantidades são determinadas de igual modo somente para o EVR em análise. O cálculo do gradiente de deformação neste tipo de análise não é necessário, uma vez que tal é prescrito e conhecido em cada um dos incrementos.

Note-se que nas análises micromecânicas ou multi-escala é, por defeito, obtido o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff homogeneizado. Na subrotina GPVARSOUT este é transformado no tensor das tensões de Cauchy de acordo com a Equação (4.33). Recorde-se que, ao contrário do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff, o tensor das tensões de Cauchy é sempre simétrico, o que é conveniente em termos de implementação computacional.

5.4 Implementação computacional 2: histórico do gradiente de deformação

A segunda implementação computacional que foi necessário incorporar no programa LINKS diz somente respeito à capacidade de análise micromecânica. Neste programa, a perturbação do equilíbrio do EVR é, por defeito, imposta através da aplicação de um gradiente de deformação total, sendo este definido no ficheiro de entrada. Mediante um procedimento de decomposição multiplicativa, este é aplicado de forma incremental de acordo com o número de incrementos especificado. Apesar da definição adequada do gradiente de deformação total permitir realizar análises micromecânicas sob diferentes tipos de solicitação, estas encontram-se limitadas a carregamentos monotónicos.

A necessidade de ultrapassar limitações computacionais associadas a algumas análises multi-escala (ver Subcapítulo 8.4.2) conduziu ao desenvolvimento de uma nova estratégia de perturbação do equilíbrio do EVR. Em alternativa à imposição de um gradiente de deformação total, foi implementada a capacidade de aplicar um histórico do gradiente de deformação. Assim, para além do ficheiro de entrada *standard*, o programa LINKS lê um ficheiro adicional onde é prescrito o gradiente de deformação a aplicar em cada incremento. Os detalhes de implementação desta nova capacidade são intrínsecos a diferentes secções da estrutura do código, motivo pelo qual não serão aqui apresentados.

Apesar da simplicidade da ideia subjacente, a nova capacidade implementada acarreta duas grandes vantagens. Em primeiro lugar, permite realizar análises micromecânicas para qualquer solicitação perfeitamente geral, considerando carregamentos monotónicos e não-monotónicos. Em segundo lugar, pode consistir numa ferramenta bastante útil em estratégias de análise multi-escala. Como exemplo, considere-se que foi realizada uma análise à macroescala e identificada uma região crítica da estrutura em análise. Com base no histórico do gradiente de deformação armazenado nos pontos de integração de Gauss dessa região, é possível realizar posteriormente uma análise micromecânica e compreender melhor o comportamento da microestrutura do material.

Caixa 5.1: Pseudo-código da subrotina de pós-processamento GPVARSOUT.

- (i) Inicialização do ciclo sobre os pontos de integração de Gauss macroscópicos de interesse, $igpout := 1$
- (ii) Cálculo das coordenadas cartesianas na configuração de referência
- (iii) Cálculo da componente desviadora do tensor das tensões de Cauchy e dos respetivos segundo e terceiro invariantes

$$\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - p \mathbf{I}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{\sigma}_d, \quad J_3 = \det \boldsymbol{\sigma}_d$$

- (iv) Cálculo da tensão equivalente de von Mises

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2}$$

- (v) Cálculo da triaxialidade e do parâmetro do ângulo de Lode

$$T = \frac{p}{\bar{\sigma}}, \quad \bar{\theta} = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \xi$$

- (vi) Cálculo do gradiente de deformação

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = [\mathbf{I} - \nabla_x \mathbf{u}]^{-1}$$

- (vii) Cálculo do tensor de Cauchy-Green direito

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$$

- (viii) Cálculo do tensor de Hencky e respetiva componente desviadora

$$\mathbf{E}^{(0)} = \frac{1}{2} \ln [\mathbf{C}], \quad \mathbf{E}_d^{(0)} = \mathbf{E}^{(0)} - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{E}^{(0)}$$

- (ix) Cálculo da deformação total equivalente acumulada

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{E}_d^{(0)}\|$$

- (x) Obtenção da porosidade intrínseca ao modelo constitutivo (análise à macro-escala) ou cálculo da mesma ao nível do EVR (análises micromecânicas ou multi-escala), f

- (xi) Escrita dos parâmetros calculados num ficheiro de saída

- (xii) Controlo do ciclo

SE $igpout < ngpout$ ENTÃO

$igpout := igpout + 1$ e IR PARA (ii)

SENÃO

SAIR

Capítulo 6

Fratura Dúctil Multi-escala

6.1 Introdução

Durante as duas últimas décadas verificou-se uma profunda evolução no que diz respeito à investigação e desenvolvimento de novos materiais com aplicação estrutural. Uma grande parte deste investimento é impulsionado por excelência pelas indústrias automóvel, aeronáutica, aeroespacial e militar, nas quais os componentes estruturais são sujeitos a condições de serviço exigentes e muitas vezes desfavoráveis. Apesar da crescente importância dos materiais compósitos nestes setores, os metais e as ligas metálicas detêm ainda uma importância indiscutível na constituição estrutural de automóveis, aviões, comboios e navios, sendo por este motivo alvo de contínuo desenvolvimento. Em qualquer uma destas indústrias é imperativo conhecer a capacidade dos materiais resistirem aos mais diversos fenómenos de dano e de degradação interna, dado que esta irá ditar o tempo de vida útil dos componentes em condições normais de serviço ou a sua resposta a solicitações de ocorrência imprevisível. Por outro lado, a otimização de componentes a nível estrutural resulta geralmente na minimização da quantidade de material e em geometrias de maior complexidade. Para satisfazer tais requisitos, os processos de fabrico tornam-se mais severos do ponto de vista metalúrgico, sendo referida, em particular, a conformação plástica de lingotes, barras e perfis por laminagem e extrusão e de placas e chapas por embutidura. Por esta razão, é crucial conhecer também o estado inicial de degradação do material após a produção do componente, uma vez que tal poderá ter uma influência preponderante na capacidade de resistência do material durante a sua aplicação.

O início do estudo dos mecanismos de iniciação e evolução de dano remete para a década de 40, na qual surgiu um ramo da mecânica dos meios contínuos designado por mecânica do dano contínuo. A mecânica do dano contínuo tem por objetivo fundamental a formulação de modelos constitutivos contínuos capazes de prever o início e evolução do estado de degradação do material. Esta encontra-se diretamente relacionada com a mecânica da fratura e, apesar de em ambas ser estudado o comportamento de sólidos danificados, deve ser realizada uma clara distinção entre as abordagens adotadas. Na mecânica da fratura o dano é modelado através de descontinuidades no domínio macroscópico do material, geralmente associadas à presença de fendas, enquanto em mecânica do dano contínuo, o dano é apenas explicitamente considerado no domínio microscópico, sendo o material tomado como um meio contínuo à macroescala. De facto, a distinção clássica entre as duas abordagens

baseia-se precisamente na dimensão crítica dos defeitos à macroescala. Na mecânica do dano contínuo, o efeito dos mecanismos de dano que ocorrem à microescala são incorporados no modelo constitutivo do material através da introdução de uma ou mais variáveis de dano e respetivas leis de evolução.

Um dos mecanismos de dano mais importantes em metais e ligas metálicas estruturais consiste na fratura dúctil por nucleação, crescimento e coalescência de vazios. Apesar da sua identificação em finais da década de 40 (Tipper, 1949), somente uns anos mais tarde os aspetos fenomenológicos deste mecanismo começaram a ser documentados de forma detalhada (Puttick (1959), Rogers (1960), Beachem (1963), Gurland and Plateau (1963)). Pouco depois surgiram os primeiros estudos micromecânicos (McClintock (1968), Rice and Tracey (1969)) e desde então a aproximação micromecânica da fratura dúctil tem sido extensamente investigada e desenvolvida pela comunidade científica. O sucesso de tal aproximação deve-se ao facto de permitir uma ligação direta com a microestrutura do material, aspeto essencial no desenvolvimento de ligas metálicas com melhores propriedades e de processos de conformação plástica mais adequados. Apesar da grande diversidade de aspetos fenomenológicos subjacentes ao estudo da fratura dúctil por nucleação, crescimento e coalescência de vazios, o problema fundamental da mecânica do dano contínuo pode ser formulado de modo geral como:

De que modo deve a informação relativa à microestrutura do material, e ao seu estado de degradação interno, ser incorporada nas leis constitutivas macroscópicas e qual a sua evolução em função do histórico de deformação?

Neste capítulo é, em primeiro lugar, realizado um enquadramento global dos aspetos da fratura dúctil nos quais a presente dissertação é centrada. Com base em observações experimentais, são de seguida introduzidos e descritos os mecanismos microscópicos e macroscópicos que descrevem a fratura dúctil por nucleação, crescimento e coalescência de vazios. Por último, são revistos os principais estudos micromecânicos e modelos contínuos de fratura de materiais dúcteis porosos, sendo em particular apresentada a formulação e identificadas as limitações do modelo de Gurson.

6.2 Mecanismos de fratura dúctil a várias escalas

6.2.1 Enquadramento

Na presente dissertação é somente considerada a fratura dúctil de metais e de ligas metálicas monofásicas, sujeitas a solicitações monotónicas quasi-estáticas em regime de comportamento elasto-plástico. Neste contexto, existem dois modos comuns de localização plástica intrinsecamente associados à fratura dúctil de ligas metálicas e envolvendo o mecanismo de nucleação, crescimento e coalescência de vazios (ver Figura 6.1)(Tekoglu et al., 2015). No primeiro modo a fratura dúctil é dominada por localização plástica macroscópica e podem identificar-se três mecanismos distintos:

- *Mecanismo A1.* Este mecanismo caracteriza-se pela ocorrência de fratura do material sem qualquer degradação interna da sua microestrutura. Após uma fase de deformação plástica homogénea, o escoamento plástico localiza-se em estricção ou numa banda de corte e prossegue até que se dê a separação do material. A inexistência de dano interno deve-se à ausência de condições de nucleação de vazios, pelo que tal mecanismo apenas ocorre em metais mono ou policristalinos com um elevado grau de pureza;

- *Mecanismo A2.* Este mecanismo envolve a localização de deformação plástica em bandas de corte como resultado de diversos mecanismos de amaciamento possíveis e na ausência de qualquer dano interno. Somente após a acumulação de grandes níveis de deformação plástica na banda de localização é que se inicia a nucleação, crescimento e coalescência de vazios que conduzem por fim à rotura e separação do material;
- *Mecanismo A3.* Este mecanismo envolve a nucleação, crescimento e coalescência de vazios antes da ocorrência de localização de deformação plástica no material. A acumulação de dano induz o amaciamento progressivo do material e quando supera a sua capacidade de endurecimento resulta na localização de deformação plástica. A localização plástica ocorre numa banda de escoamento cuja largura engloba os vazios e que conduz por fim à rotura e separação do material;

No segundo modo a fratura dúctil é dominada pela coalescência de vazios e podem identificar-se dois mecanismos distintos:

- *Mecanismo B1.* Neste mecanismo a degradação do material decorrente da nucleação e crescimento de vazios inicia-se antes de qualquer localização plástica. A localização plástica a nível microscópico começa somente na fase de coalescência, entre vazios adjacentes, em particular nos ligamentos entre estes. O escoamento contínuo de deformação plástica limita-se aos ligamentos e consequentemente resulta numa banda de localização plástica macroscópica cuja largura é da ordem do tamanho dos vazios. A rotura e separação do material ocorre quando a propagação da fenda por coalescência contínua entre vazios adjacentes atinge um comprimento crítico;
- *Mecanismo B2.* Enquanto no mecanismo B1 a fenda se forma continuamente por coalescência entre vazios segundo um processo ‘vazio-a-vazio’, neste mecanismo surge uma microfenda inicial resultante da coalescência entre um conjunto ou agregado de vazios que se encontram próximos entre si. Após este instante, a fenda propaga-se através da coalescência sequencial da sua extremidade com os vazios adjacentes e, como tal, não ocorre a formação de uma banda de localização plástica. A rotura e separação do material ocorre quando o comprimento da fenda atinge um comprimento crítico.

Esta importante distinção dos modos de localização plástica e descrição dos diferentes mecanismos associados à fratura dúctil foi recentemente apresentada por Tekoglu et al. (2015). A compreensão da fratura dúctil dominada pela coalescência de vazios (mecanismos B1 e B2) é particularmente relevante nas aplicações estruturais já referidas, onde a falha do componente estrutural é geralmente dada pelo surgimento de uma microfenda. Por outro lado, a compreensão da fratura dúctil dominada pela localização plástica macroscópica (mecanismos A1, A2 e A3) é fundamental nos processos de conformação plástica, onde a falha do material é geralmente dada pelo surgimento de localização plástica.

6.2.2 Mecanismos microscópicos

Pelos motivos já discutidos na secção anterior, o mecanismo de nucleação, crescimento e coalescência de vazios tem uma importância fundamental na fratura dúctil de metais e ligas metálicas estruturais. A nucleação é a primeira etapa da evolução do dano do material e ocorre em locais da microestrutura propícios à formação de vazios. O crescimento e/ou evolução da geometria dos vazios existentes são governados pela deformação plástica sofrida

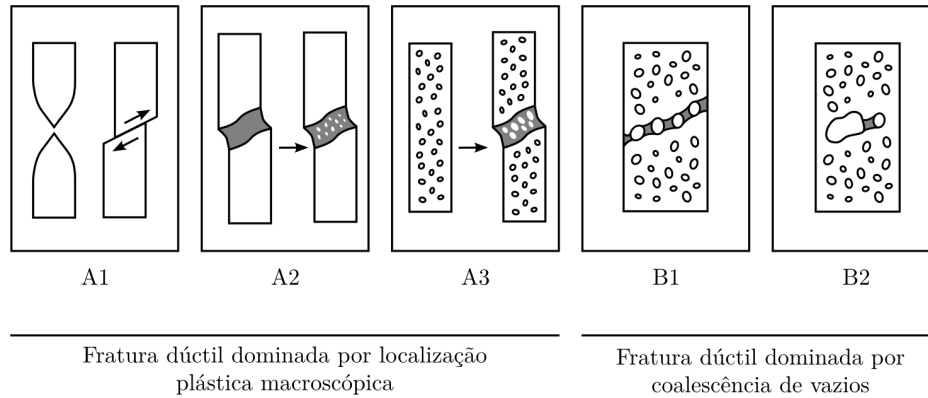


Figura 6.1: Mecanismos de fratura dúctil de metais e ligas metálicas monofásicas em regime de comportamento elasto-plástico.

pelo material, enquanto a nucleação de vazios adicionais prossegue em simultâneo. Atingido um dado estado de deformação plástica, inicia-se a interação entre os vazios mais próximos entre si e desencadeia-se um determinado micromecanismo de coalescência. Apesar das principais etapas de evolução do dano se encontrarem já bem estabelecidas, a identificação, caracterização e modelação dos diversos micromecanismos subjacentes a cada uma delas lançam um amplo leque de desafios à comunidade científica atual. Tal complexidade deve-se ao facto dos micromecanismos de fratura dúctil serem altamente dependentes da geometria da estrutura e das condições de carregamento por um lado, e diretamente relacionados entre si e com fatores adicionais como a distribuição de heterogeneidades e a geometria dos vazios por outro.

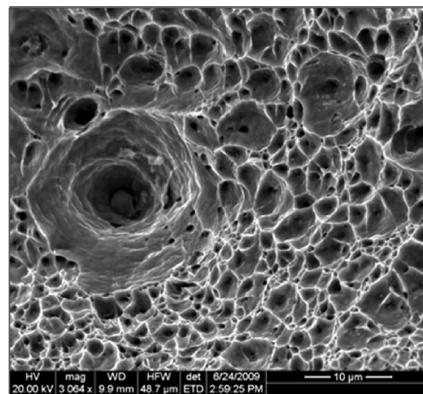


Figura 6.2: Superfície de fratura dúctil típica, caracterizada por uma topologia porosa (retirada de AbdelAl (2009)).

A compreensão e descrição fenomenológica destes micromecanismos exige indubitavelmente a observação experimental dos mesmos através de tecnologias com tal capacidade. As primeiras fratógrafias de uma superfície de fratura dúctil típica foram obtidas por microscopia eletrónica de varrimento por Plateau et al. (1957), podendo ainda referir-se as observações experimentais de Stone et al. (1985), Garrison and Moody (1987), Garrison et al. (1997) e mais recentemente de Barsoum and Faleskog (2007a) e Achour et al. (2013). Fratógrafias como a representada na Figura 6.2 e outras observações microestruturais de diferentes instantes da evolução do dano são fundamentais no estudo da fratura dúctil.

Em seguida são discutidos os principais aspetos relacionados com os micromecanismos de nucleação, crescimento e coalescência de vazios.

Nucleação

Tipper (1949) identificou pela primeira vez que a nucleação de vazios se encontra diretamente relacionada com a presença de partículas de segunda fase ou inclusões na microestrutura do material. O efeito da fração volúmica de partículas de segunda fase e inclusões na ductilidade de ligas metálicas foi estabelecido por Edelson and Baldwin (1962) e evidenciado experimentalmente pela topologia porosa (ver Figura 6.2) das superfícies de fratura observadas experimentalmente até à data. Alguns anos mais tarde, estudos de fratura dúctil (Argon and Im (1975), Goods and Brown (1979), Beremin et al. (1981), Roy et al. (1981), Marini et al. (1985)) estabeleceram por fim os aspetos fenomenológicos básicos que caracterizam a nucleação.

Promovida pela deformação plástica do material, a nucleação em metais e ligas metálicas estruturais ocorre principalmente através da rotura de partículas de segunda fase ou inclusões (*particle cracking*) ou pela separação de superfícies na interface entre as partículas e inclusões e a matriz do material (*particle decohesion*). Ambos os mecanismos são bem evidentes na Figura 6.3, onde são apresentadas observações captadas por microscopia eletrónica de varrimento da microestrutura de um alumínio 6061 reforçado com partículas de óxido de alumínio.

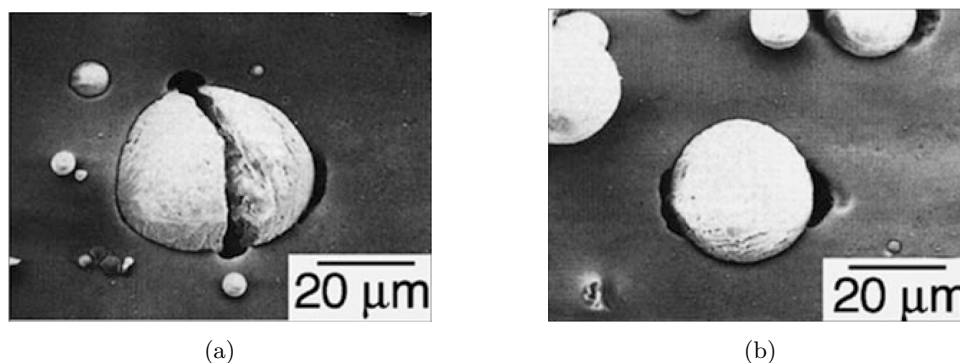


Figura 6.3: Mecanismos de nucleação observados num alumínio 6061 reforçado com partículas de óxido de alumínio (Al_2O_3), solicitado na direção horizontal: (a) rotura de partículas de segunda fase ou inclusões (*particle cracking*); (b) separação de superfícies na interface entre as partículas e inclusões e a matriz do material (*particle decohesion*) (retiradas de Kanetake et al. (1995)).

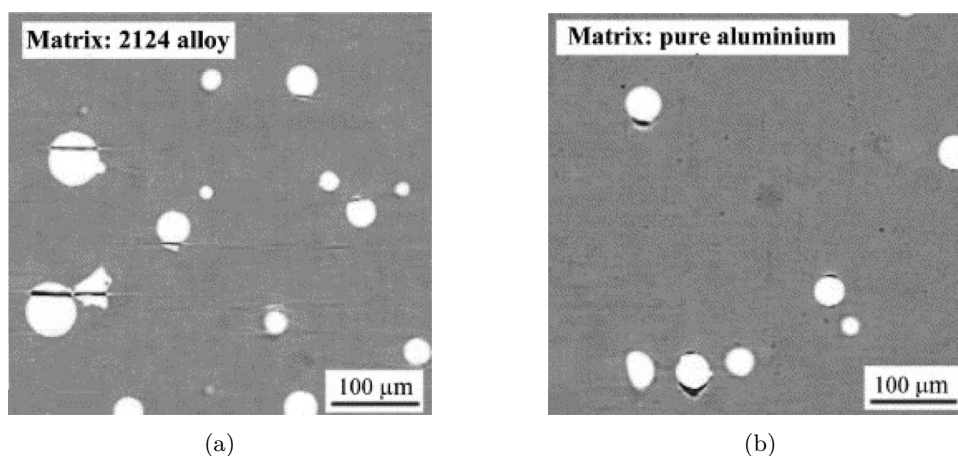


Figura 6.4: Mecanismos de nucleação observados por tomografia de raios-X: (a) rotura de partículas de segunda fase ou inclusões (*particle cracking*) numa matriz dura (alumínio 2124); (b) separação de superfícies na interface entre as partículas e inclusões e a matriz do material (*particle decohesion*) numa matriz macia (alumínio puro) (retiradas de Babout et al. (2004b)).

O micromecanismo de nucleação que prevalece depende de um conjunto de diversos fatores, entre os quais se podem destacar as propriedades mecânicas da matriz (tensão de cedência e curva de endurecimento), a geometria e rigidez das partículas/inclusões e o tipo de carregamento (direção e estado de tensão promovido) (Benzerga and Leblond, 2010). Na Tabela 6.1 podem ser observadas as principais tendências associadas a cada um dos fatores descritos.

Babout et al. (2004a) estudou o efeito das propriedades da matriz na competição entre os mecanismos de *particle cracking* e de *particle decohesion*. Através de observações de alta resolução por tomografia de raios-X (Babout et al., 2004b), verificou que no caso de uma matriz macia (alumínio puro) a nucleação ocorre predominantemente por *particle decohesion* (ver Figura 6.4(b)), enquanto no caso de uma matriz dura (liga de alumínio 2124) o micromecanismo de *particle cracking* é dominante (ver Figura 6.4(a)). Mais recentemente, Achour et al. (2013) realizaram observações experimentais em aço de alta resistência e baixa liga (*High-Strength Low-Alloy Steel*) por microscopia eletrónica de varrimento e espetroscopia de raios X que permitiram avaliar o efeito do estado de tensão na competição entre os micromecanismos de nucleação.

Tabela 6.1: Parâmetros que influenciam o mecanismo de nucleação prevalente e tendências relativas ao aumento de cada parâmetro (Benzerga and Leblond, 2010).

Parâmetro	Tendência	
	<i>Cracking</i>	<i>Decohesion</i>
Tensão de cedência da matriz	↗	↘
Endurecimento da matriz	↗	↘
Elongação da partícula	↗	↘
Rigidez da partícula	↘	↗
Carga na direção axial	↗	↘
Carga na direção transversal	↘	↗
Triaxialidade de tensões	↘	↗

Crescimento

Após a nucleação de vazios pelos micromecanismos já descritos, segue-se uma fase estável de crescimento que acompanha a deformação plástica contínua sofrida pelo material. Porém, esta etapa não é simples de caracterizar de forma sistemática, dado que o crescimento dos vazios depende de diversos fatores muitas vezes relacionados entre si. Diversos estudos experimentais permitiram compreender com maior detalhe os aspectos fenomenológicos relacionados com o crescimento de vazios, entre os quais se podem referir as contribuições de Marini et al. (1985), Pardoen and Delannay (1998), Chae and Koss (2004), Babout et al. (2004a), Weck et al. (2008) e Maire (2014).

Em primeiro lugar, deve notar-se a dependência em relação ao micromecanismo de nucleação que lhes deu origem, sendo os vazios originados por *particle cracking* propícios a abrir e a tornarem-se arredondados e os vazios originados por *particle decohesion* propícios a alongarem-se ao longo da direção principal da carga aplicada (Carvalho, 2015). Para além da influência no micromecanismo de nucleação predominante, a geometria das partículas e inclusões pode também influenciar o crescimento dos vazios. Outro aspeto importante nas ligas metálicas estruturais consiste na coexistência de crescimento de vazios pré-existentes e de nucleação contínua de novos vazios. Em particular, a nucleação pode ocorrer simultaneamente em diferentes escalas de forma diferenciada e a nucleação de vazios em partículas finas de precipitação, diretamente relacionadas com o endurecimento da matriz, pode ter um impacto direto na sua deformação plástica. Na Figura 6.5 pode ser observado um aço ao carbono hipoeutectóide no qual a nucleação e crescimento de vazios ocorreu nas inclusões de grande dimensão (sulfetos e óxidos) e foi praticamente inexistente nas partículas de cementite precipitadas (Pineau et al., 2016).

Em segundo lugar, é imperativo apontar a dependência do crescimento dos vazios em relação ao estado de tensão ou, mais precisamente, em relação à triaxialidade. A grande dependência da fratura dúctil por nucleação, crescimento e coalescência de vazios deste parâmetro adimensional foi há muito estabelecida por Stone et al. (1985) e Garrison and Moody (1987). Como é possível compreender de seguida, o termo ‘crescimento’ não é o

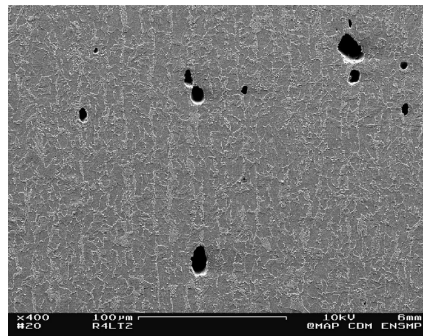


Figura 6.5: Crescimento de vazios num aço ao carbono hipoeutectóide em que o carregamento é normal ao plano da figura (retirada de Pineau et al. (2016)).

mais adequado, uma vez que sob determinadas condições a geometria dos vazios pode sofrer uma distorção profunda acompanhada por um crescimento volumétrico pouco significativo ou mesmo inexistente. Apesar da distorção acompanhar o crescimento dos vazios em regimes de alta triaxialidade, esta é particularmente proeminente em baixas triaxialidades. Os diversos tipos de distorção de vazios dependem essencialmente da presença de componentes de deformação de corte e das interações partícula-vazio (Pineau et al., 2016). Com base nos estudos de McClintock et al. (1966), Fleck and Hutchinson (1986), Scheyvaerts et al. (2011) e Tvergaard (2012) foi possível observar que na presença de um campo de deformações de corte e sem considerar a interação partícula-vazio, vazios inicialmente esféricos tendem a sofrer uma elongação inicial seguida de uma rotação e que eventualmente podem colapsar se não ocorrer localização nos ligamentos com vazios adjacentes. Tal rotação e ‘alinhamento’ de vazios pode induzir a localização plástica macroscópica em banda e ditar o modo de interligação entre vazios adjacentes. Note-se que também num campo de deformação uniaxial o crescimento dos vazios pode ser acompanhado por uma determinada rotação que promove a formação de uma banda de corte cuja largura é inferior à dimensão dos vazios (Pineau et al., 2016). A interação partícula-vazio pode também ter um impacto significativo, podendo destacar-se o fenómeno de *void locking* em regime de baixa triaxialidade. Sob certas circunstâncias, o crescimento do vazio após nucleação é impedido mesmo em regiões altamente deformadas e sob tensões elevadas (Benzerga and Leblond, 2010). Estudos conduzidos por Lee and Mear (1999) e Siruguet and Leblond (2004) permitiram verificar que, para regimes de triaxialidade inferiores a $2/3$, regiões da interface partícula-matriz diametralmente opostas estão sujeitas a tensões resultantes de compressão (ver Figura 6.6). O fenómeno de *void locking* consiste pois no contacto forçado na interface partícula-matriz (ver Figura 6.7(a)) e desempenha um papel fundamental em campos dominantes de corte. Como se pode observar na Figura 6.7(b), a inclusão de óxido de magnésio-alumina impede o progresso da distorção do vazio na medida em que não permite o seu colapso após sofrer elongação e rotação.

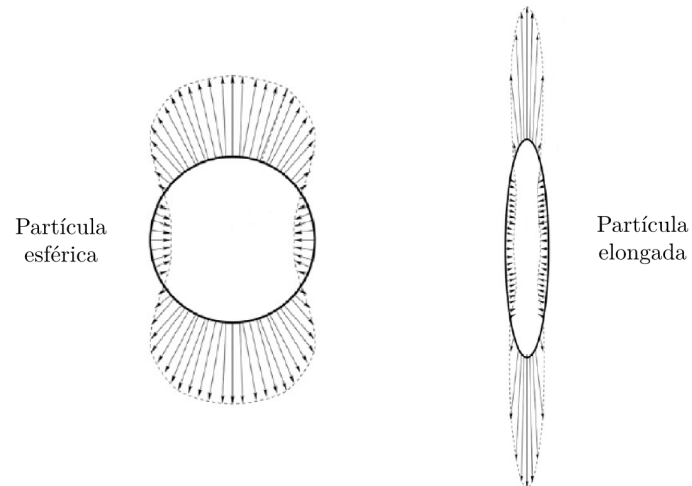


Figura 6.6: Representação esquemática da distribuição de tração normal na interface partícula-matriz numa solicitação de tração uniaxial ($T = 1/3$) na direção vertical (adaptado de (Benzerga and Leblond, 2010)).

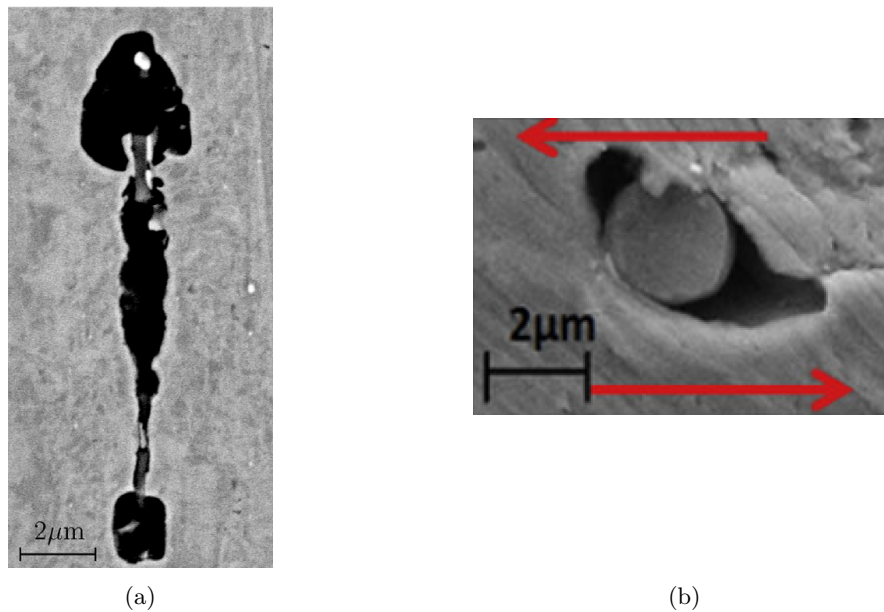


Figura 6.7: Fenômeno de *void locking* em condições de baixa triaxialidade: (a) inclusões de MnS em aço ao carbono hipoeutectóide (adaptado de (Benzerga, 2000)); (b) inclusão de Al_2O_3 em aço de alta resistência e baixa liga (*High-Strength Low-Alloy Steel*) (retirada de Achour et al. (2013)).

Coalescência

Estudos experimentais evidenciam que a fase estável de crescimento dos vazios termina por ação de diversos micromecanismos de localização de escoamento plástico nas regiões da matriz entre vazios (ligamentos) (Benzerga and Leblond, 2010). Após tais micromecanismos serem desencadeados verifica-se uma aceleração do crescimento dos vazios até que estes se interligam entre si, originando uma microfenda que se irá propagar. A esta fase terminal da fratura dúctil deu-se a designação de coalescência de vazios.

Apesar de alguns aspetos ainda não serem claros, os principais aspetos fenomenológicos já se encontram documentados com base em observações experimentais (Pineau et al., 2016). A coalescência de vazios ocorre segundo diversos modos, apresentando cada um destes variantes distintas em função de diversos fatores, nomeadamente das propriedades de escoamento plástico da matriz, de fatores microestruturais (tamanho, geometria e distribuição espacial de vazios) e, sobretudo, das condições de carregamento (direção e estado de deformação promovido). Apesar de serem encontradas diversas designações e classificações na literatura, podem ser considerados três modos principais de coalescência:

- *Coalescência por estricção interna localizada (internal necking coalescence)*. A coalescência por estricção interna localizada do ligamento é o modo de coalescência mais comum e foi o primeiro a ser identificado (Cottrell (1959), Brown and Embury (1973) e Argon et al. (1975)). Este modo é caracterizado por um crescimento substancial de vazios adjacentes até que estes se unam por estricção do ligamento (ver Figura 6.8), envolvendo a formação de regiões de descarregamento elástico separadas de regiões de grande deformação plástica (os ligamentos) (Pardoen and Hutchinson (2000), Benzerga and Leblond (2010));
- *Coalescência por localização em banda de corte (shear void coalescence, void-sheet coalescence)*. Este modo de coalescência foi identificado experimentalmente por Cox and Low (1974) e caracteriza-se pela localização plástica numa banda de corte microscópica que se forma entre dois vazios (Figuras 6.9(a) e 6.9(b)). Neste caso, a coalescência pode no entanto ocorrer sem um crescimento substancial dos vazios e enquanto estes ainda se encontram distanciados (Figura 6.9(c)). É esperado que tal modo de coalescência resulte numa redução local e talvez global da ductilidade do material, uma vez que o crescimento estável dos vazios é subitamente terminado enquanto estes ainda se encontram bastante afastados (Benzerga and Leblond, 2010). Para além desse aspeto, a coalescência por localização em banda de corte é altamente dependente da posição relativa entre os vazios e da direção principal de carregamento, apresentando a banda de localização geralmente uma determinada inclinação em relação a esta última;
- *Coalescência em colunas de vazios (necklace coalescence)*. Este último modo de coalescência foi introduzido por Benzerga (2010) e caracteriza-se pela formação de colunas de vazios na direção principal de carregamento (Figura 6.10). Este modo de coalescência é particularmente dominante em aços que contêm inclusões alongadas na direção do carregamento (Benzerga, 2000) ou em ligas metálicas nas quais existem agregados de inclusões alinhadas na mesma direção (Meyers and Aimone (1983), Pardoen (1998)).

Para além dos principais aspetos fenomenológicos discutidos anteriormente, outros de maior complexidade podem desempenhar uma papel importante no modo de coalescência. Em particular, pode referir-se o impacto do fenómeno de *void locking* ao impedir a coalescência por estricção interna localizada ou, por outro lado, a promoção da ocorrência de coalescência devido à existência de porosidade secundária, caracterizada pela existência de microvazios nos ligamentos entre os vazios principais.

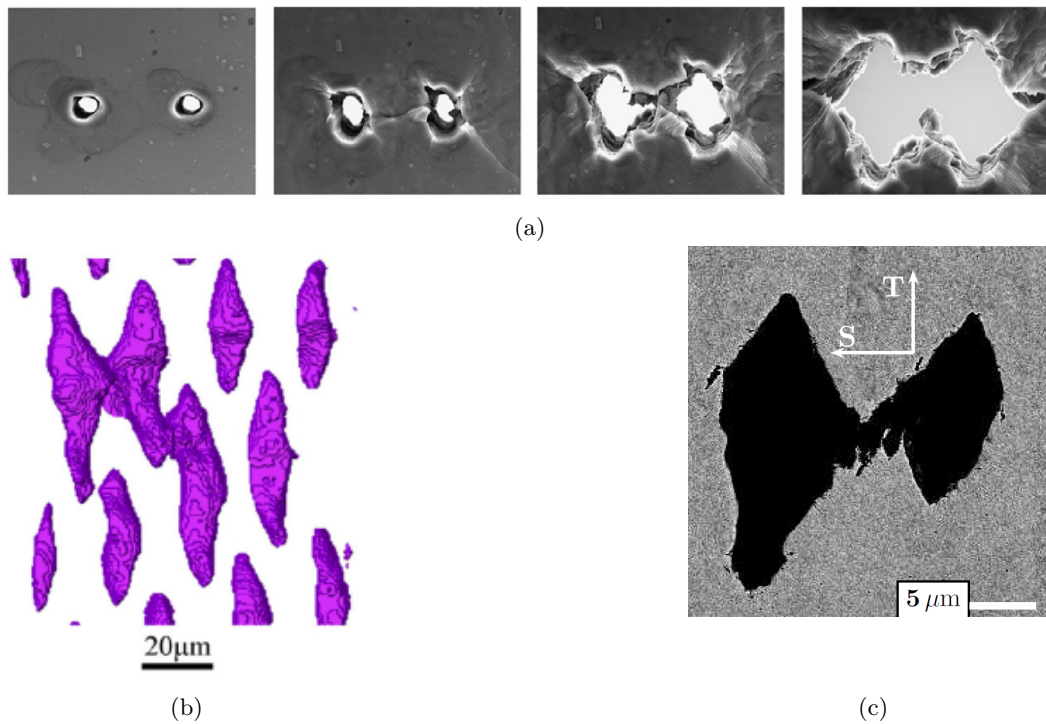


Figura 6.8: Mecanismo de coalescência por estricção interna localizada (*internal necking coalescence*): (a) sequência de deformação em chapa de liga de alumínio 5052 perfurada a laser e solicitada na direção vertical (retirado de Weck and Wilkinson (2008)); (b) Tomografia de um provete de cobre perfurado a laser e solicitado na direção vertical (retirado de (Weck et al., 2008)); (c) Provete de aço ferrítico-perlítico solicitado na direção vertical (retirado de Benzerga and Leblond (2010)).

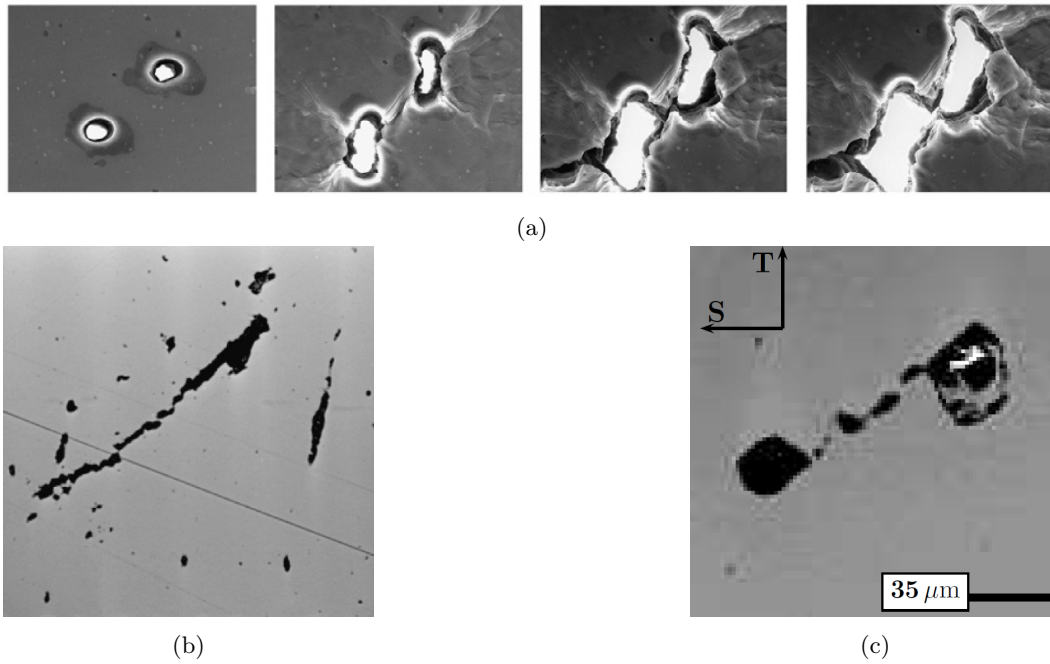


Figura 6.9: Mecanismo de coalescência por localização em banda de corte (*shear void coalescence*): (a) sequência de deformação em chapa de liga de alumínio 5052 perfurada a laser e solicitada na direção vertical (retirado de Weck and Wilkinson (2008)); (b) Solicitação na direção vertical (retirado de Benzerga and Leblond (2010)); (c) Solicitação axisimétrica com maior magnitude na direção vertical (retirado de Pineau et al. (2016)).

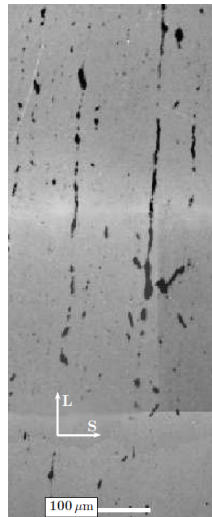


Figura 6.10: Mecanismo de coalescência em colunas de vazios (*necklace coalescence*) em estado plano de deformação. Solicitação na direção vertical (retirada de Benzerga and Leblond (2010)).

6.2.3 Evidências e mecanismos macroscópicos

Quando os micromecanismos de crescimento, distorção e coalescência de vazios ocorrem nos respectivos pontos de nucleação, o material diz-se estar num estado danificado. Este estado corresponde, por exemplo, a um provete solicitado sem qualquer fenda inicial ou à região deformada plasticamente na extremidade de uma fenda¹ (Pineau et al., 2016). Em consistência com os aspetos discutidos inicialmente neste capítulo, a progressão dos micromecanismos de nucleação, crescimento e coalescência de vazios resulta na acumulação de dano até que surja uma fenda, uma fenda pré-existente se propague ou ocorra fratura por instabilidade plástica. Como já foi visto, neste último caso os micromecanismos discutidos poderão não ocorrer ou ter uma importância reduzida (mecanismos A1 e A2).

Para ilustrar a correlação dos mecanismos microscópicos e respetiva evolução do dano com o domínio macroscópico, é considerada a tração uniaxial de um provete axissimétrico entalhado sem qualquer fenda inicial. Para tal, na Figura 6.11 encontra-se representada a curva força-deslocamento obtida experimentalmente por Benzerga (2000) e onde são indicados alguns pontos relevantes juntamente com as respetivas observações experimentais na região central do provete. São também apresentadas representações esquemáticas dos micromecanismos já discutidos para uma melhor compreensão da fratura dúctil em ambas as escalas. Após atingir o ponto (a), o material entra em regime de deformação plástica e sofre endurecimento até ser atingido o ponto de carga máxima (b). Até este ponto o dano acumula-se sobretudo por nucleação, crescimento e distorção de vazios, sendo porém o seu impacto na resposta macroscópica do material praticamente inexistente. Após o ponto (b), o amaciamento provocado pela evolução do dano sobrepõe-se à capacidade de endurecimento do material e a curva inicia uma trajetória descendente. Nesta fase podem já ser verificados eventos isolados de coalescência e possível formação de microfendas. A alteração da resposta do material no ponto (c) corresponde à formação de uma fenda macroscópica que resulta da coalescência dos vazios de maiores dimensões e da interação entre microfendas previamente formadas. Após este ponto a curva sofre uma queda acentuada associada à propagação da fenda ao longo do provete, sofrendo esta uma aceleração quando se propaga ao longo das bandas de corte. Por último, no ponto (d) ocorre a rotura final do provete.

Para finalizar a descrição fenomenológica dos principais aspetos da fratura dúctil, são discutidos de forma concisa alguns dos mecanismos que prevalecem na extremidade de uma fenda e que são responsáveis pela sua propagação. Qualquer fenda macroscópica inicia-se com uma abertura submicroscópica δ_0 e atinge uma abertura δ que pode chegar a centenas de micrómetros, em metais de alta tenacidade, antes da sua propagação². Devido ao fenómeno de concentração de tensões, forma-se uma região de alta tensão na extremidade da fenda que promove a acumulação de níveis significativos de deformação plástica. Estão assim criadas as condições favoráveis à ocorrência de nucleação em partículas de segunda fase ou inclusões aí existentes. Após o crescimento suficiente dos vazios nucleados, a sua aproximação à extremidade da fenda promove a localização plástica e o consequente desencadeamento dos mecanismos de coalescência entre a fenda e os vazios na vizinhança da sua extremidade (Pineau et al., 2016). Note-se que no caso de um provete pré-fissurado, como por exemplo um provete CTS (*Compact Tension Specimen*) extensivamente utilizado em medições experimentais de mecânica da fratura, a coalescência dos primeiros vazios com a extremidade da fenda marca efetivamente o início da propagação da fenda e define a ver-

¹Note-se que o termo ‘fenda’ é aqui utilizado para referir uma fenda no domínio macroscópico, sendo o termo ‘microfenda’ o equivalente no domínio microscópico.

²Em concordância com a literatura de mecânica da fratura, a variável δ é apenas utilizada nesta secção para representar a abertura da extremidade da fenda ou *crack opening displacement*.

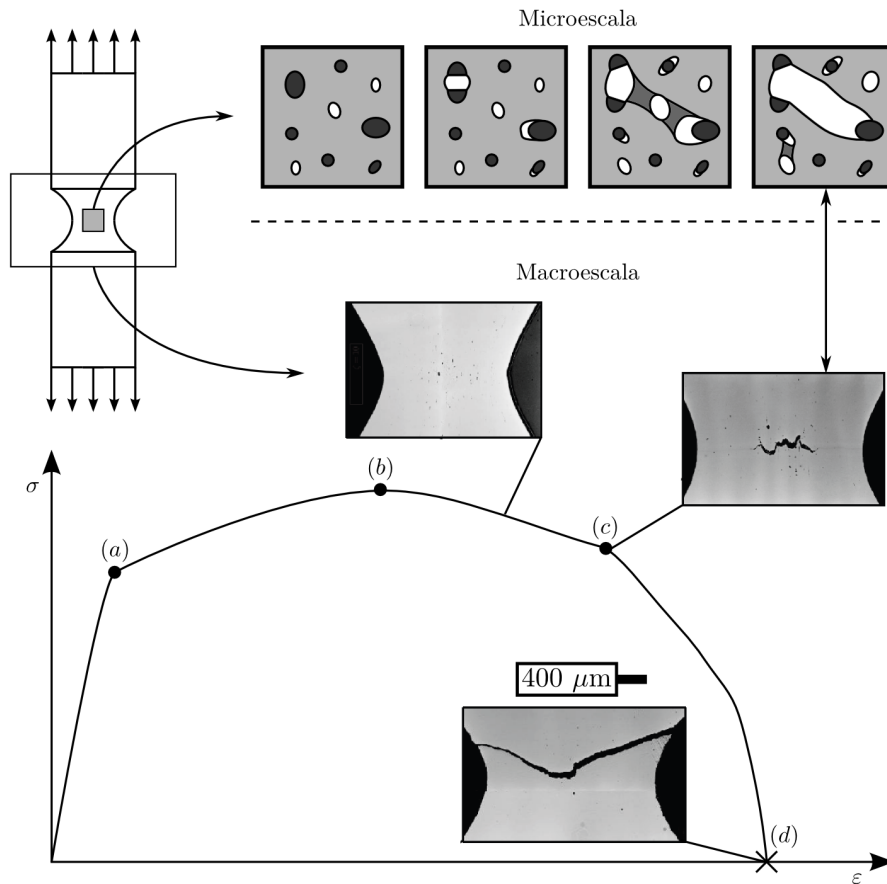


Figura 6.11: Mecanismos de fratura dúctil num provete axissimétrico entalhado solicitado em tração uniaxial (adaptado de Benzerga (2000)).

dadeira tenacidade do material. Em função de diversos fatores já discutidos anteriormente (propriedades de escoamento plástico da matriz, tamanho e distribuição de vazios,...) e com base em observações experimentais, podem identificar-se quatro mecanismos principais de propagação de uma fenda na sua extremidade (ver Figura 6.12)(Pineau et al., 2016):

- *Mecanismo de coalescência de múltiplos vazios (M1)*. A ocorrência deste mecanismo é propiciada por grandes taxas de nucleação na região vizinha da extremidade da fenda. Múltiplos vazios interatuam entre si e crescem em simultâneo, verificando-se em certo instante a coalescência simultânea entre os mesmos e com a extremidade da fenda (Tvergaard and Hutchinson, 2002). O micromecanismo de coalescência por estricção interna localizada é dominante neste mecanismo;
- *Mecanismo de coalescência vazio-a-vazio (M2)*. Em contraste com o mecanismo anterior, neste caso o processo é propício a ocorrer para frações volúmicas de vazios baixas. O vazio mais próximo da extremidade da fenda cresce com pouca influência dos vazios circundantes até ocorrer a coalescência por estricção interna localizada entre este e a

fenda. Dado que a fração volúmica de vazios em ligas metálicas é geralmente inferior a 1% este mecanismo é particularmente comum;

- *Mecanismo de coalescência vazio-a-vazio em 'zig-zag' (M3)*. Sob certas condições, como por exemplo em aços de baixo endurecimento em estado plano de deformação (Clayton and Knott (1976), Needleman and Tvergaard (1987), Xia et al. (1995)), verifica-se igualmente a ocorrência de coalescência vazio-a-vazio mas esta ocorre predominantemente por localização em banda de corte. Como já foi comentado, este mecanismo diminui significativamente a tenacidade do material na medida em que é necessária uma quantidade muito menor de energia de deformação para a propagação da fenda;
- *Mecanismo de propagação em região de dano disperso (M4)*. Este mecanismo foi ainda pouco explorado e difere dos anteriores na medida que a abertura crítica da fenda atinge valores muito superiores ao espaçamento médio entre os vazios. Neste caso, a região próxima da extremidade da fenda assemelha-se à região central de um provete axissimétrico entalhado e as primeiras ocorrências de coalescência podem não ocorrer com a extremidade da fenda.

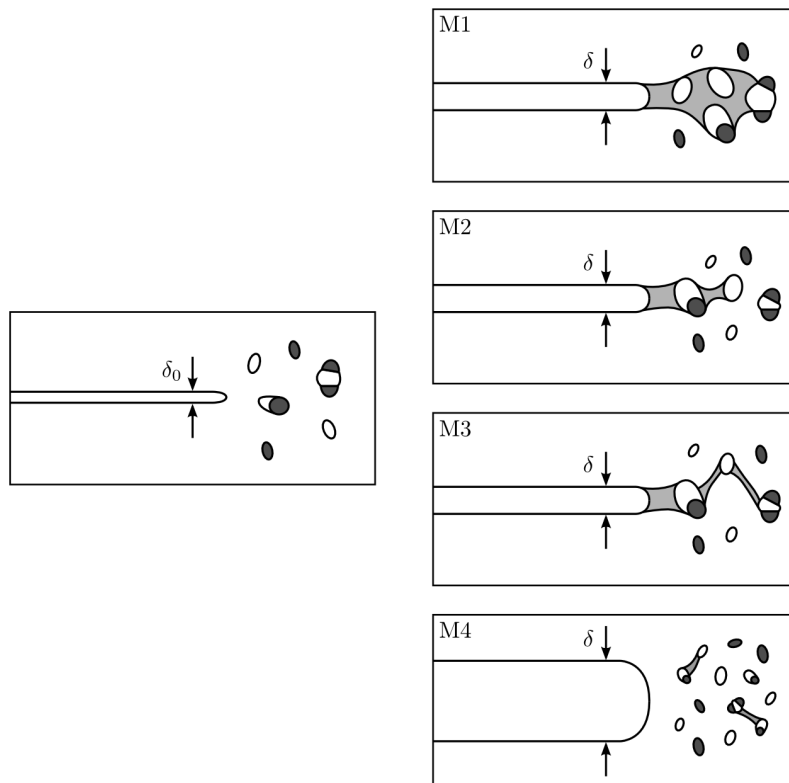


Figura 6.12: Mecanismos característicos de propagação da extremidade de uma fenda na fratura de metais dúcteis.

6.3 Estudos micromecânicos e modelos de fratura dúctil de materiais porosos

6.3.1 Enquadramento

No subcapítulo anterior foram apresentados os principais aspetos fenomenológicos que permitem caracterizar a fratura dúctil de metais e ligas metálicas estruturais. A discussão dos micromecanismos de nucleação, crescimento e coalescência de vazios foi porém essencialmente baseada em observações experimentais e conclusões empíricas estabelecidas por diversos investigadores ao longo das últimas décadas. No entanto, apesar da importância indiscutível de evidências experimentais nesta área, estudos realizados em simultâneo no domínio da mecânica computacional revelaram-se fundamentais para a profunda compreensão da fratura dúctil (por exemplo Needleman (1987), Li et al. (1999), Hao et al. (2004), Hu and Ghosh (2008), Vernerey et al. (2008), Ghosh et al. (2009), Tian et al. (2010), Ghosh and Paquet (2013)). Baseados geralmente em estudos micromecânicos de EVRs através do Método dos Elementos Finitos, as simulações numéricas permitiram desde cedo (McClintock (1968), Rice and Tracey (1969)) retirar conclusões importantes, sobretudo no que diz respeito à física do crescimento, distorção e coalescência de vazios.

Uma das principais metodologias para desenvolver modelos contínuos de fratura dúctil de materiais porosos baseia-se na modelação micromecânica da nucleação, crescimento e coalescência de vazios e na sua respetiva incorporação na formulação constitutiva do material (Gurson (1975), Gurson (1977), Rousselier (1981), Rousselier (1987)). O primeiro destes modelos foi introduzido por Gurson (Gurson, 1977) e é, ainda hoje, um dos mais conhecidos modelos contínuos de fratura de materiais dúcteis porosos. Apesar de originalmente se tratar de um modelo de crescimento de vazios, o modelo de Gurson estabeleceu um ponto de partida e a base para o desenvolvimento de modelos mais complexos. Os modelos derivados de ‘modificações’ do modelo de Gurson resultaram, de modo geral, da inclusão de três tipos de considerações adicionais: parâmetros relacionados com as propriedades da matriz (anisotropia e modelo de escoamento plástico) (Needleman (1972b), Kubin and Estrin (1985), McCormick (1988), Koplik and Needleman (1988), Horstemeyer et al. (2000)), parâmetros microscópicos relacionados com os vazios (geometria, distribuição e evolução da fração volumétrica de vazios) (Koplik and Needleman (1988), Pardoen and Hutchinson (2000), Tian et al. (2010), Ghosh and Paquet (2013)) e parâmetros relacionados com o carregamento ou estado de tensão (triaxialidade e parâmetro de Lode) (Koplik and Needleman (1988), Pardoen and Hutchinson (2000), Gao and Kim (2006), Tvergaard (2009), Nielsen et al. (2012), Tvergaard (2012)). Também o primeiro modelo explícito de coalescência (Thomason, 1985) e as suas ‘modificações’ posteriores foram desenvolvidos com base na mesma estrutura conceptual, enquanto que modelos explícitos de nucleação são ainda praticamente inexistentes (Benzerga et al., 2016).

Dado que o principal objetivo da presente dissertação consiste em avaliar a precisão do modelo de Gurson através de uma análise multi-escala, este modelo será aqui apresentado e revisto em detalhe. Será, no entanto, primeiro realizada uma breve revisão dos principais modelos contínuos de fratura de materiais dúcteis porosos (crescimento e coalescência) e o seu devido enquadramento em termos cronológicos. Para uma descrição destes modelos em maior detalhe sugerem-se algumas revisões de referência como Tvergaard (1990), Besson (2010), Benzerga and Leblond (2010), Benzerga et al. (2016) e Pineau et al. (2016).

6.3.2 Modelos de fratura de materiais dúcteis porosos

Crescimento

Os primeiros estudos micromecânicos de crescimento de vazios foram realizados considerando um único vazio num meio infinito elasto-plástico (McClintock (1968), Rice and Tracey (1969)). Pouco tempo depois, Needleman (1972a) considerou um EVR com um único vazio e certas condições de fronteira periódicas que lhe permitiram reproduzir um material com uma distribuição periódica de vazios. Tais estudos permitiram incluir o efeito da interação entre vazios vizinhos, quer nas fase inicial de crescimento, quer na fase final próxima da coalescência (Benzerga et al., 2016). Concluiu-se que tais estudos micromecânicos baseados em EVRs consistem de facto numa ferramenta poderosa para a compreensão dos diversos aspetos relacionados com a fratura dúctil.

Com base em estudos micromecânicos semelhantes (Gurson, 1975), Gurson desenvolveu então o seu modelo de crescimento de vazios, designado por modelo de Gurson (Gurson, 1977), utilizando técnicas de homogeneização semelhantes àquelas introduzidas por Bishop et al. (1945). Este modelo considera um EVR com um único vazio esférico concêntrico, embebido numa matriz de von Mises rígida-perfeitamente plástica. Para além disso, assume a hipótese fundamental de que os vazios permanecem esféricos durante o seu crescimento, não sendo considerados ou explicitamente modelados quaisquer efeitos de nucleação ou coalescência. Poucos anos depois, o modelo de Gurson começou a sofrer as primeiras modificações (Chu and Needleman (1980), Tvergaard (1981), Tvergaard (1982), Tvergaard and Needleman (1984)) de modo a incluir aspetos ainda não considerados. A primeira destas modificações disse respeito à inclusão de uma parcela de nucleação na lei da evolução de porosidade original de Gurson (Chu and Needleman, 1980). Tvergaard (1981) introduziu, em seguida, três parâmetros heurísticos para obter melhores correlações com algumas simulações micromecânicas, sendo o seu significado físico objeto de diversas interpretações (Gologanu et al. (1997), Benzerga and Leblond (2010), Leblond and Morin (2014)). Por último, em Tvergaard and Needleman (1984) é incorporado o efeito de coalescência através da modificação da lei de evolução da fração volumica de vazios e consequentemente do critério de cedência e da lei de escoamento plástico associativa da matriz. Do conjunto das modificações mencionadas resultou o designado modelo de Gurson-Tvergaard-Needleman (ou modelo GTN), o qual é hoje bastante utilizado em simulações numéricas de elementos finitos na análise de provetes e estruturas. Nos anos seguintes procurou-se também estender o modelo de Gurson para considerar o endurecimento cinemático por deformação da matriz (Mear and Hutchinson (1985), Becker and Needleman (1986), Tvergaard (1987), Leblond et al. (2014)) e mais recentemente foi proposta uma importante alteração à lei de evolução da fração volumica de vazios por Nahshon and Hutchinson (2008). Esta última teve por objetivo incorporar heurísticamente a evolução de dano verificado em condições de baixa ou nula triaxialidade (Tvergaard (2008), Tvergaard (2009), Tvergaard (2012), Dahl et al. (2012), Nielsen et al. (2012)).

Somente quase duas décadas após o estabelecimento do modelo de Gurson é proposta a primeira extensão no que diz respeito à geometria de vazios. O modelo de Gologanu-Leblond-Deveaux (ou modelo GLD) foi proposto por Gologanu et al. (1993), Gologanu et al. (1994) e Gologanu (1997) e consiste numa extensão do modelo de Gurson que incorpora a anisotropia resultante da geometria de vazios. Em particular, foram considerados vazios esferoides (prolatos e oblatos) e introduzidas em conformidade duas novas variáveis microestruturais que definem a proporcionalidade do esferoide e a direção do seu eixo principal. No entanto, verificou-se que a condição de esferoidicidade dos vazios, ainda que inicialmente plausível,

seria demasiado restritiva após deformação, onde os três eixos principais do vazio tomam quase sempre valores distintos. Esta limitação levou ao desenvolvimento do recente modelo de Madou-Leblond (Madou and Leblond (2012a), Madou and Leblond (2012b), Madou and Leblond (2013a), Madou and Leblond (2013b)), o qual se trata de uma extensão do modelo GLD para vazios elipsoidais genéricos caracterizados por três eixos principais distintos. Tal como no modelo GLD, tal extensão envolveu a introdução de novas variáveis microestruturais necessárias para descrever as duas proporcionalidades dos eixos principais do elipsoide e as respetivas direções. Outros aspetos de maior complexidade foram também melhorados neste modelo, nomeadamente no que diz respeito à função de cedência para diferentes solicitações e às leis de evolução das variáveis microestruturais.

A anisotropia plástica da matriz tem sido geralmente considerada ao assumir que o material respeita o critério ortotrópico de Hill (1948) (Benzerga et al., 2016). A primeira extensão do modelo de Gurson que incorporou o efeito de anisotropia plástica da matriz foi proposta por Benzerga and Besson (2001) e deu origem ao modelo de Benzerga e Besson. Em termos práticos tal modificação diz somente respeito à consideração de um mesmo vazio esférico embebido numa matriz de Hill e as únicas alterações na função de cedência original encontram-se no cálculo da tensão equivalente (agora de acordo com a teoria de plasticidade anisotrópica de Hill) e num coeficiente multiplicativo constante. Apesar de evidências da sua precisão (Morin et al., 2014), este modelo é curiosamente criticado pelo facto da influência da anisotropia não ser considerada no crescimento de vazios, dado que utiliza exatamente o mesmo campo de velocidades do modelo de Gurson. À semelhança da extensão introduzida pelo modelo GLD para a matriz de von Mises, os modelos propostos por Monchiet et al. (2006), Monchiet et al. (2008) e por Keralavarma and Benzerga (2008), Keralavarma and Benzerga (2010) incorporaram o efeito da geometria de vazios embebidos numa matriz de Hill, sendo somente nestes considerados vazios esferoidais (prolato e oblato). Mais recentemente foi proposto o modelo de Morin-Leblond-Kondo (Morin et al., 2015b), o qual considera o caso geral de vazios elipsoidais genéricos.

Para além dos modelos baseados no modelo de Gurson já mencionados, deve ser feita uma referência aos modelos desenvolvidos por Ponte Castañeda e colaboradores. Tais modelos tiveram a sua origem em extensões da teoria de homogeneização de Hashin-Shtrikman realizadas no início da década de 90 por Castañeda (1991), Willis (1991) e Michel and Suquet (1992) e baseiam-se num procedimento de ‘comparação’ do compósito real de comportamento não-linear com um compósito de referência com comportamento linear. O primeiro destes modelos foi proposto por Castañeda and Zaidman (1994) e completado mais tarde por Kaisalam and Castañeda (1998). Apesar da sua precisão para solicitações desviadoras, verificou-se que a função de cedência sobrestima o limite do material para solicitações hidrostáticas. Este defeito foi corrigido no modelo proposto por Danas and Castañeda (2009a), Danas and Castañeda (2009b), baseado num método de homogeneização de segunda ordem desenvolvido por Castañeda (2002). Mais recentemente, também Agoras and Castañeda (2013), Agoras and Castañeda (2014) propuseram um novo modelo melhorado utilizando um ‘procedimento iterativo’ concebido por Castañeda (2012) (Benzerga et al., 2016). Note-se que as bases de tal aproximação paralela (Castañeda (1991), Willis (1991) e Michel and Suquet (1992)) em nada estavam relacionadas com o modelo original de Gurson (1977). Porém, tais contribuições foram posteriormente incluídas no desenvolvimento dos modelos de Gologanu-Leblond-Deveaux (Gologanu et al. (1993), Gologanu et al. (1994), Gologanu (1997)) e de Madou-Leblond (Madou and Leblond (2012a), Madou and Leblond (2012b), Madou and Leblond (2013a), Madou and Leblond (2013b)), bem como o modelo de Danas and Castañeda (2009a), Danas and Castañeda (2009b) incorporou alguns aspetos comuns

em que se baseou o desenvolvimento do modelo Madou-Leblond. Existe assim um certo grau de convergência entre ambas as aproximações, apesar da hipótese da sua unificação futura numa única aproximação ser ainda imprevisível.

Coalescência

Como já foi referido, a primeira contabilização do efeito de coalescência de vazios remete para o modelo de GTN, no qual este fenómeno foi simplesmente incorporado através da modificação da lei de evolução da fração de volúmica de vazios do modelo original de Gurson. Contudo, diversos investigadores procuraram desenvolver modelos explícitos de coalescência que permitissem incluir os aspetos fenomenológicos dos micromecanismos já discutidos. Um dos principais métodos para modelar a coalescência de vazios consiste em analisá-la como um fenómeno de localização de deformação plástica em bandas cuja espessura é da escala do tamanho dos vazios. Apesar de outras interpretações do mesmo fenómeno (Rudnicki and Rice (1975), Needleman and Rice (1978), Yamamoto (1978), Perrin (1992), Castañeda and Zaidman (1994), Benzerga et al. (1999)), este método encontra-se já bem suportado quer em termos experimentais, quer em termos de estudos micromecânicos (ver Benzerga and Leblond (2010), Pineau et al. (2016)). Segundo este método, o EVR é geralmente dividido em regiões densas rígidas que intersejam as suas fronteiras e regiões porosas respeitantes à presença de vazios. Dois tipos de implementação seguem esta metodologia: no primeiro os vazios não são explicitamente modelados e são utilizadas leis constitutivas de materiais porosos nessas regiões (Gologanu et al. (2001b), Gologanu et al. (2001a), Leblond and Mottet (2008), Tekoglu et al. (2012)); no segundo os vazios são explicitamente considerados e são estes modelos que serão aqui sucintamente mencionados.

O primeiro modelo de coalescência foi desenvolvido por Thomason (1985) e era baseado num EVR cilíndrico com um vazio coaxial de comprimento finito e embebido numa matriz de von Mises elasto-perfeitamente plástica. As duas variáveis microestruturais deste modelo dizem respeito à razão de proporção geométrica do vazio cilíndrico e à razão entre o raio lateral do vazio e o comprimento lateral do EVR. No entanto, as leis de evolução destas variáveis foram apenas estabelecidas por Benzerga (2000), Benzerga (2002) e Pardoan and Hutchinson (2000), considerando ambos vazios inicialmente esféricos e, em particular, uma nova variável microestrutural relacionada com a evolução da geometria do vazio. Enquanto a extensão de Pardoan and Hutchinson (2000) procurou incorporar o efeito de endurecimento por deformação da matriz, a extensão de Benzerga (2000), Benzerga (2002) procurou eliminar o principal defeito do modelo de Thomason relacionado com vazios extremamente oblatos. Uma revisão detalhada de tais extensões heurísticas pode ser consultada em Benzerga and Leblond (2010). Em Benzerga et al. (2004) o critério de coalescência de Benzerga (2002) foi estendido para incorporar o efeito de anisotropia plástica da matriz e mais recentemente, no domínio de solicitações de tração, Benzerga and Leblond (2013) revisitaram o modelo original de Thomason e desenvolveram um novo modelo através da redefinição do critério de coalescência. Morin et al. (2015a) introduziram melhorias nos campos de velocidades do modelo de Benzerga and Leblond (2013) e, muito recentemente, Keralavarma and Chockalingam (2016) estenderam por fim este modelo para o caso de uma matriz anisotrópica de Hill e considerando campos de velocidades contínuos da família introduzida por Morin et al. (2015a). No domínio de solicitações combinadas de tração e corte pode destacar-se o desenvolvimento do modelo de Tekoglu et al. (2012), o qual consiste essencialmente na generalização do modelo de Thomason (1985) ou de Benzerga (2000), Benzerga (2002) para contabilizar a componente de corte do campo de deformações microscópico resultante de

carregamentos não axissimétricos. Com o mesmo objetivo, Torki et al. (2015) estenderam o modelo de Benzerga and Leblond (2013) de modo a incorporar o efeito de uma solicitação de corte remota.

Apesar dos desenvolvimentos registados nos últimos anos, existe ainda um grande conjunto de desafios a superar na modelação de coalescência. Em particular, destaca-se a modelação praticamente não explorada dos micromecanismos de coalescência por localização em banda de corte ou em colunas de vazios e a integração dos modelos de coalescência nos modelos de crescimento de vazios (Morin et al., 2016).

6.3.3 Modelo de Gurson

Formulação

O modelo de Gurson foi proposto por Gurson (1977) e pode ser considerado o primeiro modelo desenvolvido para descrever o mecanismo de dano interno de metais dúcteis porosos por crescimento de vazios na sua microestrutura. Este modelo foi desenvolvido com base na teoria de análise limite (equivalente à teoria da plasticidade na ausência de elasticidade e endurecimento por deformação) e na teoria de homogeneização de Hill-Mandel (condição de taxa de deformação uniforme na fronteira) (Mandel (1964), Hill (1967)) aplicadas sobre um EVR esférico contendo um vazio esférico concêntrico. No seu modelo, Gurson considera que o material real pode ser convenientemente modelado assumindo uma distribuição periódica de vazios, justificando assim a representatividade de um EVR com um único vazio. O material da matriz é assumido isotrópico, incompressível e rígido-perfeitamente plástico de acordo com o modelo constitutivo de von Mises e o campo de velocidades considerado é dado por uma componente de expansão isotrópica e incompressível e uma componente linear de deformação uniforme.

À macroescala, o modelo constitutivo que governa o comportamento do material é compressível e rígido-plástico, com endurecimento e amaciamento associados respetivamente à redução e ao crescimento de vazios. A função de cedência é também dependente da pressão hidrostática e é dada por

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, f) = \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_y} \right)^2 + 2f \cosh \left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y} \right) - (1 + f^2), \quad (6.1)$$

em que p é a pressão hidrostática, σ_y é a tensão de cedência do material³ e $\bar{\sigma}$ é a tensão equivalente de von Mises. A única variável microestrutural e de dano do modelo de Gurson é a fração volúmica de vazios (ou porosidade) f , a qual é definida por

$$f = \frac{V_\mu^v}{V_\mu}, \quad (6.2)$$

em que V_μ^v é o volume do vazio e V_μ é o volume do EVR. Note-se que esta varia entre 0 e 1, em que $f = 0$ corresponde ao material no seu estado virgem (não danificado) e $f = 1$ a um estado completamente danificado e consequente perda total de capacidade carga.

³Note-se que ao ser assumido que o material é perfeitamente plástico a tensão de cedência é constante e independente da deformação plástica, i.e $\sigma_y \equiv \sigma_{y0}$.

Admitindo que a lei de escoamento plástico é associativa, i.e o potencial plástico é tomado pela função de cedência, temos

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \left[\boldsymbol{\sigma}_d + \frac{1}{3} f \sigma_y \sinh \left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y} \right) \mathbf{I} \right], \quad (6.3)$$

em que $\dot{\gamma}$ é o multiplicador plástico.

A dedução da lei de evolução da porosidade é bastante simples e baseia-se essencialmente no princípio da conservação da massa. Por definição, a massa volúmica de um material poroso pode ser dada por

$$\rho = \rho_m v_m, \quad (6.4)$$

em que ρ_m e v_m são respetivamente a massa volúmica e o volume específico da matriz. Através da igualdade trivial

$$v_m + f = 1, \quad (6.5)$$

a massa volúmica do material pode então ser relacionada com a porosidade por

$$\rho = \rho_m (1 - f). \quad (6.6)$$

Derivando em ordem ao tempo e dado que a matriz é assumida incompressível, após uma simples manipulação algébrica temos

$$\dot{f} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} (1 - f). \quad (6.7)$$

Pelo princípio da conservação da massa verifica-se facilmente que

$$\dot{\epsilon}_{\text{vol}} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}, \quad (6.8)$$

em que $\dot{\epsilon}_{\text{vol}}$ é a taxa de deformação volumétrica total. Assumindo que a deformação volumétrica elástica é desprezável, i.e $\dot{\epsilon}_{\text{vol}} = \dot{\epsilon}_{\text{vol},p}$, a lei de evolução da porosidade pode então escrever-se

$$\dot{f} = (1 - f) \dot{\epsilon}_{\text{vol},p}, \quad (6.9)$$

em que $\dot{\epsilon}_{\text{vol},p}$ é a componente plástica da taxa de deformação volumétrica. Recordando que

$$\dot{\epsilon}_{\text{vol},p} = \text{tr } \dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon}_p : \mathbf{I}, \quad (6.10)$$

e atendendo à lei de escoamento plástico definida na Equação (6.3) temos

$$\dot{\epsilon}_{\text{vol},p} = \dot{\gamma} f \sigma_y \sinh \left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y} \right). \quad (6.11)$$

A expressão anterior implica que o modelo de Gurson prevê compressibilidade plástica macroscópica na presença de vazios, com um escoamento plástico expansivo ou compressivo sob uma pressão hidrostática de tração ou compressão respetivamente. A lei de evolução da porosidade pode por fim reescrever-se como

$$\dot{f} = (f - f^2) \sigma_y \sinh \left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y} \right). \quad (6.12)$$

Pode ainda verificar-se que a evolução da variável de dano não está diretamente associada a nenhum mecanismo dissipativo.

Particularidades e limitações

Como foi descrito previamente, o modelo de Gurson estabeleceu o ponto de partida para o desenvolvimento de novos modelos mais complexos no contexto da fratura de materiais dúcteis porosos. Para além disso, consiste na base do modelo GTN, atualmente bastante utilizado em simulações numéricas estruturais além do contexto académico. Apesar da sua importância pelos motivos referidos, trata-se de um modelo bastante simples e que naturalmente apresenta um conjunto de limitações já extensivamente identificadas desde a sua publicação. Face ao objetivo principal da presente dissertação, é importante compreender algumas das principais limitações associadas a este modelo e que poderão justificar os resultados obtidos.

Antes da descrição das limitações do modelo, são indicadas algumas particularidades que demonstram essencialmente a sua consistência com resultados prévios ao seu desenvolvimento. Baseado em Benzerga et al. (2016) temos:

- No caso de ser considerado um material não danificado ($f = 0$), o modelo de Gurson coincide com o modelo de von Mises, sendo este último independente da pressão hidrostática.
- Para solicitações puramente hidrostáticas ($\bar{\sigma} = 0$) verificamos que a cedência do material ocorre quando

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, f) = 2f \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_y}\right) - (1 + f^2) = 0, \quad (6.13)$$

o que após manipulação algébrica resulta

$$p = -\frac{2}{3} \sigma_y \ln f. \quad (6.14)$$

Este resultado está de acordo com o cálculo exato da cedência plástica de uma esfera com um vazio esférico concêntrico e sujeita a uma solicitação puramente hidrostática.

- Para solicitações puramente desviadoras ($p = 0$) verificamos que a cedência do material ocorre quando

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, f) = \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_y}\right)^2 + 2f - 1 - f^2 = 0, \quad (6.15)$$

o que após simplificação algébrica e sabendo que $f \in [0, 1]$ vem

$$\bar{\sigma} = \sigma_y (1 - f). \quad (6.16)$$

Este resultado está de acordo com a relação rigorosa decorrente da conhecida desigualdade de Cauchy-Schwarz e dada por

$$\bar{\sigma} \leq \sigma_y (1 - f). \quad (6.17)$$

- A função de cedência do modelo de Gurson pode ser convenientemente reescrita em função da triaxialidade como

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, f) = \left(T \frac{p}{\sigma_y}\right)^2 + 2f \cosh\left(\frac{3}{2} T \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_y}\right) - (1 + f^2), \quad (6.18)$$

bem como a lei de escoamento plástico e a lei de evolução de porosidade como

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \left[\boldsymbol{\sigma}_d + \frac{1}{3} f \sigma_y \sinh \left(\frac{3}{2} T \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_y} \right) \mathbf{I} \right], \quad (6.19)$$

$$\dot{f} = (f - f^2) \sigma_y \sinh \left(\frac{3}{2} T \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_y} \right). \quad (6.20)$$

Para um baixo valor de porosidade e alta triaxialidade, verifica-se que o modelo de Gurson reproduz, a menos de alguns fatores multiplicativos, a famosa lei exponencial de crescimento de vazios de Rice and Tracey (1969), derivada para um vazio único embebido numa matriz infinita.

Outras particularidades e detalhes matemáticos de maior complexidade foram recentemente reexaminados por Leblond and Morin (2014) e Benallal et al. (2014).

A primeira limitação que deve ser apontada diz respeito ao endurecimento do material. Como já foi referido, Gurson considerou inicialmente que o material da matriz era rígido-perfeitamente plástico e governado pelo modelo constitutivo de von Mises. Neste sentido, a primeira extensão do modelo original de Gurson foi desenvolvida pelo mesmo, de modo a incorporar o endurecimento por deformação. Em vez de considerar um valor constante da tensão de cedência do material ($\sigma_y \equiv \sigma_{y0}$), Gurson assumiu um endurecimento isotrópico no qual a tensão de cedência seria agora uma função da deformação plástica equivalente (de von Mises) acumulada $\sigma_y(\bar{\epsilon}_p)$. No entanto, Gurson adotou uma aproximação puramente heurística e considerou que a função de cedência original permanecia aplicável, considerando agora a lei de endurecimento $\sigma_y(\bar{\epsilon}_p)$. Como lei de evolução para $\bar{\epsilon}_p$ propôs a relação

$$\dot{W}_p = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\epsilon}_p = (1 - f) \sigma_y \dot{\bar{\epsilon}}_p. \quad (6.21)$$

Esta relação implica assumir que a taxa de dissipação plástica global ou macroscópica ($\boldsymbol{\sigma} : \dot{\epsilon}_p$) no material real, no qual o endurecimento por deformação não é homogêneo devido à presença de vazios, é igual à taxa de dissipação plástica na matriz ($(1 - f) \sigma_y \dot{\bar{\epsilon}}_p$), na qual é considerado um material fictício com endurecimento por deformação homogêneo. Um aspeto interessante de tal relação é que contabiliza o endurecimento resultante não só da componente hidrostática de $\dot{\epsilon}_p$, efetivamente associado ao crescimento de vazios, como também da sua componente desviadora. Porém, note-se que o parâmetro σ_y entra em ambos os termos $(\cdot)^2$ e $\cosh(\cdot)$, o que significa que é considerado o mesmo efeito de endurecimento por deformação sob solicitações puramente hidrostáticas ou puramente desviadoras. Leblond et al. (2014) demonstrou que tal aproximação poderia conduzir a erros significativos na evolução da porosidade, o que está intrinsecamente relacionado com o facto de o endurecimento por deformação do material não ser uniforme na presença de vazios. Como já foi referido, a incorporação de endurecimento cinemático por deformação foi desenvolvida por diversos autores (Mear and Hutchinson (1985), Becker and Needleman (1986), Tvergaard (1987), Leblond et al. (2014)). Pelos motivos discutidos, e apesar da sua extensa aplicação atual em materiais com endurecimento por deformação (Benzerga et al., 2016), é expectável que este modelo resulte numa boa aproximação para materiais com baixo endurecimento. Deve ainda referir-se que o modelo de Gurson se encontra implementado no programa LINKS de acordo com de Souza Neto et al. (2008), em que é considerado o endurecimento isotrópico do material de acordo com uma lei de endurecimento $\sigma_y(\bar{\epsilon}_p)$.

A segunda limitação diz essencialmente respeito à geometria dos vazios e à lei de evolução de dano. No modelo de Gurson é assumido que o vazio, inicialmente esférico, mantém a sua esfericidade independentemente do estado de tensão, o que é consistente com o facto de o material ser considerado isotrópico. Do ponto de vista fenomenológico, os diversos aspetos discutidos em detalhe no Subcapítulo 6.2 permitiram porém concluir que o efeito da geometria dos vazios e a sua distorção é preponderante nos micromecanismos de crescimento e coalescência, sobretudo em sollicitações de corte. Como também já foi visto, algumas das principais extensões do modelo de Gurson procuraram precisamente incorporar tal efeito reconhecendo a sua importância (Gologanu et al. (1993), Gologanu et al. (1994), Gologanu (1997), Madou and Leblond (2012a), Madou and Leblond (2012b), Madou and Leblond (2013a), Madou and Leblond (2013b)). Mais importante do que não incorporar os aspetos fenomenológicos relacionados com a evolução da forma dos vazios, é o facto de o modelo não reproduzir a evolução de dano em condições de baixa ou nula triaxialidade (característica de sollicitações de corte). Para além das observações experimentais já apresentadas, também diversos estudos micromecânicos evidenciaram a evolução de dano nestas condições (Tvergaard (2008), Tvergaard (2009), Tvergaard (2012), Dahl et al. (2012), Nielsen et al. (2012)). Note-se que a única variável microestrutural e de dano do modelo é a porosidade e que esta é somente governada pela pressão hidrostática no que diz respeito ao estado de tensão. Tal limitação pode ter um impacto significativo na modelação do comportamento real do material e na previsão da fratura dúctil. Nahshon and Hutchinson (2008) propôs uma importante alteração à lei de evolução de dano do modelo de Gurson com o objetivo de corrigir esta limitação.

A terceira limitação aqui considerada diz respeito aos mecanismos de nucleação e coalescência. O modelo de Gurson não incorpora nenhum mecanismo ou efeito de nucleação, pelo que se a porosidade inicial for nula ($f = 0$), correspondente a um estado não danificado, não será prevista qualquer evolução do dano independentemente do histórico de deformação sofrido pelo material. Por este motivo, a utilização do modelo de Gurson requer a definição de um valor de porosidade inicial, o que dificulta a definição das propriedades reais do material. Também nenhum mecanismo ou efeito de coalescência é considerado, o que tem certamente um impacto significativo na lei de evolução de dano. Como foi visto, a fase estável de crescimento dos vazios termina com o desencadeamento de diversos micromecanismos de coalescência, verificando-se uma aceleração posterior da evolução de dano. Tal efeito foi incorporado no modelo de Gurson por Tvergaard and Needleman (1984) através da definição de uma porosidade efetiva, a qual seria acelerada após um determinado valor crítico de porosidade ser atingido.

A última limitação encontra-se sobretudo relacionada com problemas de carácter matemático e numérico de tratamento mais complexo, sendo aqui apenas brevemente comentada. Para tal, convém recordar que as técnicas de homogeneização convencionais ou de primeira ordem assentam no princípio fundamental da separação de escalas. Quer isto dizer que no caso de materiais porosos, a distância média entre vazios considerada no EVR deve ser muito inferior à distância sobre a qual ocorre uma variação significativa dos campos macroscópicos. Este princípio fundamental não é, no entanto, geralmente satisfeito quando surgem fenómenos de localização de deformação plástica, em particular no caso dos micromecanismos de coalescência de vazios. Como já foi visto, estes envolvem a localização de escoamento plástico em bandas cujas dimensões são da ordem do tamanho dos vazios. Nestas condições, as equações governativas de equilíbrio perdem a elipticidade e surgem bifurcações na solução do problema de equilíbrio. Para além disso, a perda de elipticidade conduz a que, nos métodos numéricos baseados em malha, como o Método dos Elementos Finitos, os resultados obtidos

dependam da discretização em regime de pós-localização. Estes problemas são devidamente atendidos considerando modelos não-locais (incorporação de um comprimento característico no modelo de Gurson) ou técnicas de homogeneização de segunda ordem. Face à complexidade destes assuntos e aos objetivos da presente dissertação, refere-se que é considerada uma formulação local do modelo de Gurson.

Página intencionalmente deixada em branco

Capítulo 7

Análises à Macroescala

7.1 Introdução

No presente capítulo pretende-se compreender o comportamento e realizar uma primeira avaliação do modelo de Gurson através de um conjunto de simulações à macroescala. Para tal, são analisados de forma sistemática diferentes provetes utilizados em ensaios de determinação de propriedades de materiais. Em particular, face às limitações do modelo de Gurson já identificadas no Subcapítulo 6.3.3, foram selecionados provetes que promovem diferentes valores de triaxialidade, em regime de tração e corte ($T \geq 0$). Para cada um destes procura-se interpretar e descrever com detalhe a sua deformação do ponto de vista físico e a evolução das diferentes grandezas descritas no Capítulo 5, nomeadamente da variável de dano do modelo de Gurson. Para além da importância *per si* dos resultados aqui apresentados, estes servirão de base comparativa para a posterior avaliação do modelo de Gurson através de um modelo multi-escala baseado em homogeneização computacional.

Após a descrição dos provetes considerados para análise, nomeadamente da sua geometria e do estado de tensão promovido, é especificado o material escolhido e apresentado o procedimento de calibração para determinar a respetiva lei de endurecimento. Em seguida, são detalhados todos os parâmetros numéricos de simulação relevantes, indicadas algumas limitações computacionais existentes e estabelecidos os critérios de paragem para as diferentes simulações. Por último, são apresentados e discutidos de forma sistemática os resultados obtidos para cada um dos provetes e sintetizadas as principais conclusões retiradas.

7.2 Caracterização dos provetes

A triaxialidade, já definida no Capítulo 5, foi desde cedo identificada como um parâmetro essencial no estudo e caracterização da fratura dúctil de metais e ligas metálicas (McClintock (1968), Rice and Tracey (1969), Hancock and Mackenzie (1976), Mackenzie et al. (1977), Johnson and Cook (1985)). Do ponto de vista físico, o valor da triaxialidade permite caracterizar a magnitude relativa das tensões normais face às tensões de corte num determinado estado de tensão. O seu valor positivo ou negativo depende de se tratar de um estado dominante de tração ou de compressão. Mais recentemente, diversos investigadores (Kim et al. (2003), Kim et al. (2004), Bao and Wierzbicki (2004), Gao et al. (2005), Gao and Kim (2006), Kim et al. (2007), Bai and Wierzbicki (2008), Barsoum and Faleskog (2007a),

Barsoum and Faleskog (2007b), Gao et al. (2010)) demonstraram que também o parâmetro de Lode, associado ao terceiro invariante das tensões desviadoras, é importante na caracterização da fratura dúctil. Como foi possível verificar, o seu valor permite localizar o estado de tensão entre um estado de tensão de corte generalizado e um estado de tensão axissimétrico generalizado.

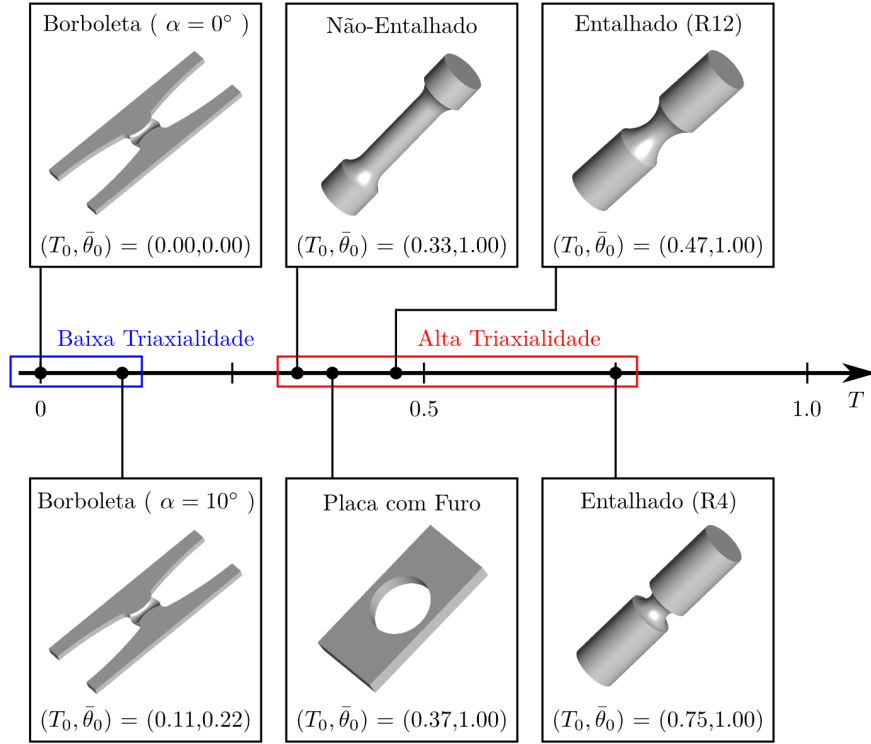


Figura 7.1: Localização do estado de tensão inicial promovido pelos diversos provetes em termos de triaxialidade e do parâmetro do ângulo de Lode.

Para atingir os objetivos propostos nesta dissertação são analisados diversos provetes que promovem diferentes valores de triaxialidade em regime de tração e corte. Estes podem ser observados na Figura 7.1, onde são indicados os respectivos valores de triaxialidade e do parâmetro do ângulo de Lode que caracterizam o estado de tensão inicial promovido (ver Tabela 3.1 em Bai (2008)). Na gama de alta triaxialidade, aqui tomada como $T \geq 1/3$, são considerados quatro provetes sob uma solicitação de tração uniaxial: dois provetes axissimétricos entalhados (com entalhes de raio 4 mm e 12 mm), um provete de placa com furo e um provete axissimétrico não entalhado. Na gama de baixa triaxialidade, aqui tomada como $0 \leq T \leq 1/3$, é considerado um provete borboleta (Bai and Wierzbicki (2008), Bai (2008)) sob uma solicitação de corte puro ($\alpha = 0^\circ$) e uma solicitação combinada de tração e corte ($\alpha = 10^\circ$). A geometria e direção de solicitação dos provetes encontram-se representadas nas Figuras 7.2-7.7.

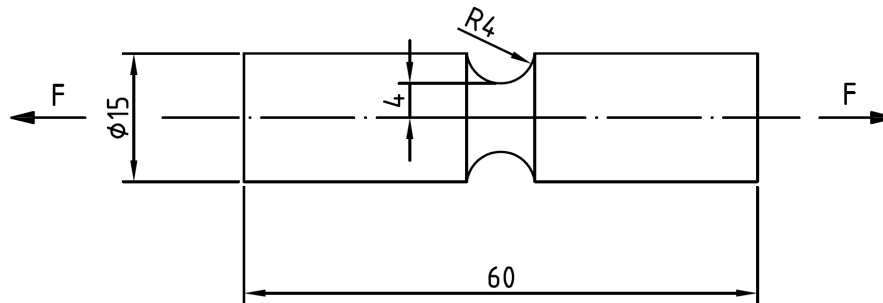


Figura 7.2: Geometria e direção de carregamento do provete axissimétrico com entalhe de raio 4 mm. Dimensões em mm.

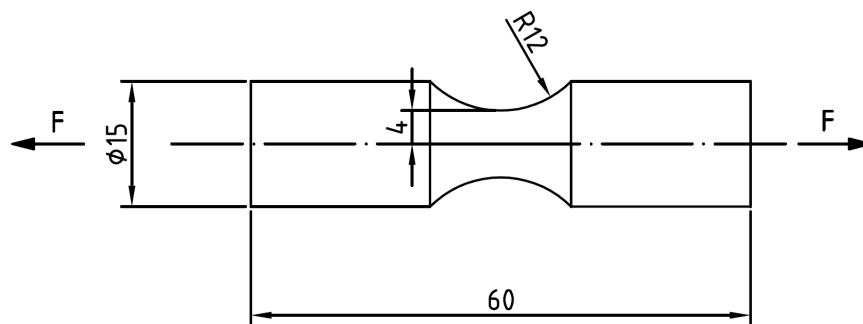


Figura 7.3: Geometria e direção de carregamento do provete axissimétrico com entalhe de raio 12 mm. Dimensões em mm.

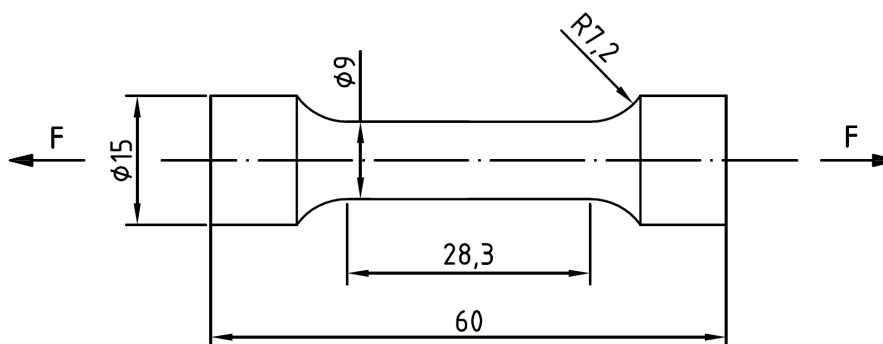


Figura 7.4: Geometria e direção de carregamento do provete axissimétrico não-entalhado. Dimensões em mm.

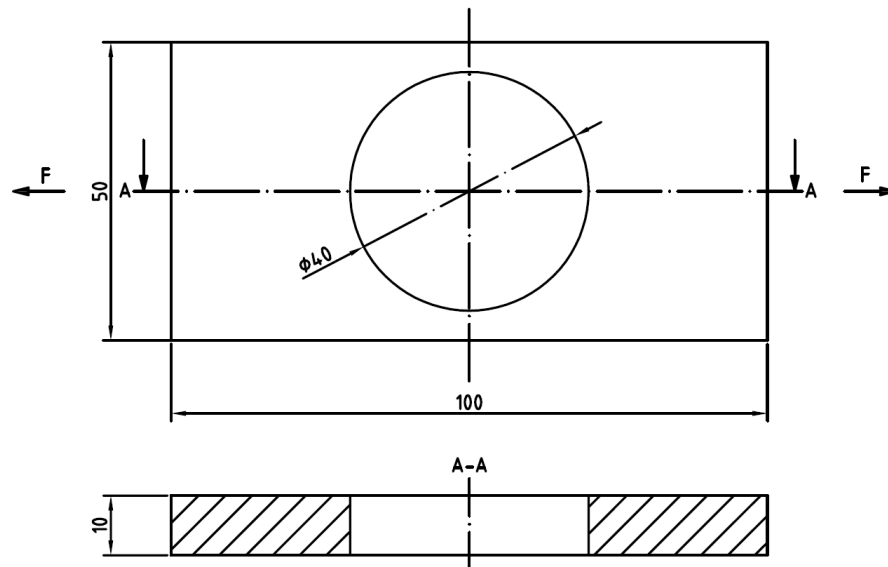


Figura 7.5: Geometria e direção de carregamento do provete de placa com furo. Dimensões em mm.

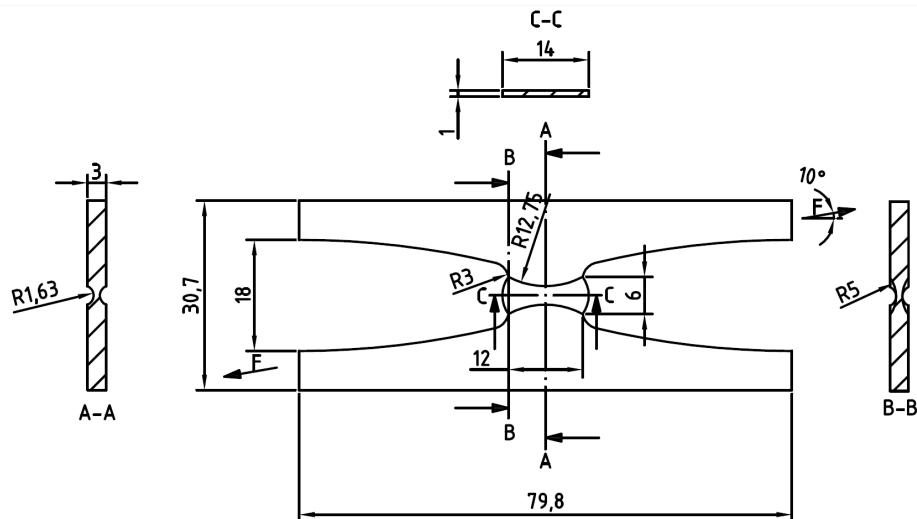


Figura 7.6: Geometria e direção de carregamento do provete borboleta sob solicitação combinada de tração e corte ($\alpha = 10^\circ$). Dimensões em mm.

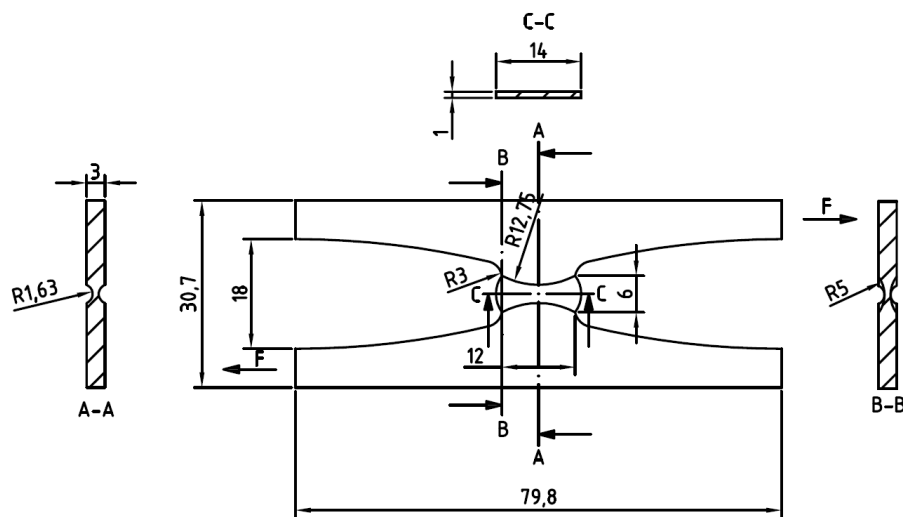


Figura 7.7: Geometria e direção de carregamento do provete borboleta sob solicitação de corte puro ($\alpha = 0^\circ$). Dimensões em mm.

7.3 Calibração do material

7.3.1 Escolha do material

A escolha da liga de alumínio 2024-T351 deve-se ao facto do seu comportamento ser altamente dependente dos invariantes do tensor das tensões já apresentados (triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode) e de existirem alguns dados experimentais disponíveis na literatura que são utilizados como referência (Bao (2003), Bao and Wierzbicki (2004), Bai and Wierzbicki (2008), Bai (2008), Malcher et al. (2011), Malcher (2012)). As propriedades elásticas e a tensão de cedência inicial que são consideradas foram retiradas de Teng (2008) e são apresentadas na Tabela 7.1.

Tabela 7.1: Propriedades da liga de alumínio 2024-T351.

Módulo de Young	E	72.4 GPa
Coefficiente de Poisson	ν	0.33
Tensão de Cedência	σ_{y0}	352 MPa
Porosidade Inicial	f_0	1.0%

Adicionalmente, foi visto que o modelo de Gurson não inclui nenhum mecanismo de nucleação e requer a definição de um valor de porosidade inicial do material f_0 não nulo. A determinação experimental deste parâmetro não é simples e é apontada desde logo como uma das dificuldades associadas à utilização deste modelo em relação à especificação das propriedades do material de interesse. Tendo em consideração o tempo computacional associado a cada análise multi-escala é apenas considerado um valor de porosidade inicial em todas as análises. Optou-se pelo valor de 1.0%, valor consistente com outros estudos encontrados na literatura (Benzerga and Leblond (2010), Benzerga et al. (2016), Pineau et al. (2016)). No entanto, refere-se que este valor deve ser tomado como um limite superior da porosidade inicial característica de metais e ligas metálicas estruturais (Benzerga and Leblond, 2010). Dado que a análise multi-escala requer a definição de um elemento de volume representativo (EVR) com um vazio esférico central, a escolha de um valor reduzido de porosidade inicial tenderia a tornar o problema mal condicionado devido à deformação inicial dos elementos da malha em torno do vazio¹.

7.3.2 Descrição do procedimento de calibração

Para além das propriedades elásticas do material, é indispensável conhecer a sua lei de endurecimento, sendo esta determinada numericamente segundo o processo de calibração descrito de seguida.

O procedimento de calibração adotado segue uma metodologia inversa de natureza iterativa semelhante à utilizada em Bao (2003). Conhecido o valor do deslocamento na fratura e a curva força-deslocamento determinados experimentalmente, o procedimento iterativo tem por objetivo identificar a curva tensão-deformação de tal modo que a curva força-deslocamento obtida numericamente seja a mais próxima possível da mesma obtida expe-

¹Em todas as simulações numéricas serão utilizadas exclusivamente malhas estruturadas e, como será visto posteriormente, surgem limitações consideráveis no que diz respeito à refinação das malhas.

rimentalmente. As etapas do procedimento que será adotado encontram-se sintetizadas na Caixa 7.1 e é relevante notar dois aspetos que justificam o mesmo.

Caixa 7.1: Procedimento de calibração da liga de alumínio 2024-T351 com base num ensaio de tração uniaxial de um provete axissimétrico não-entalhado.

- (i) Execução experimental do ensaio de tração uniaxial e registo do deslocamento na fratura e da curva força-deslocamento experimental;
- (ii) Admitir uma determinada lei de endurecimento para o material em função dos parâmetros a calibrar. Para uma primeira iteração é necessário arbitrar o valor inicial dos parâmetros de calibração numérica;
- (iii) Execução da simulação numérica do ensaio de tração uniaxial e obtenção da respetiva curva força-deslocamento;
- (iv) Comparação das curvas força-deslocamento experimental e numérica com base no erro relativo médio calculado sobre os pontos experimentais

$$\bar{\epsilon}_r = \frac{1}{N_{\text{exp}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{exp}}} \left(\frac{|F_{\text{num}} - F_{\text{exp}}|}{F_{\text{exp}}} \right)_i,$$

em que N_{exp} é o número de pontos experimentais e F_{exp} , F_{num} são respetivamente o valor de força experimental e numérico associado ao ponto i ;

- (v) Se o erro relativo médio for inferior a um determinado limite definido, o procedimento de calibração está concluído. Caso contrário, ajustar os parâmetros de calibração da lei de endurecimento do material com base no erro relativo médio e regressar à etapa (iii).

Em primeiro lugar, o programa LINKS requer apenas que sejam fornecidos pontos da lei de endurecimento do material, i.e., não é estritamente necessário definir uma forma analítica que a caracterize. No entanto, a consideração de uma ou mais leis paramétricas *standard* auxilia a definição de uma curva de endurecimento suave e a sua calibração através dos parâmetros livres. O conjunto de pontos indicado deverá ser suficientemente refinado na medida em que o programa irá efetuar uma interpolação linear entre pontos consecutivos. O segundo aspeto diz respeito ao processo iterativo em si. Em rigor, deveria ser adotado um algoritmo de otimização que permitisse determinar os parâmetros a calibrar que melhor captassem a curva força-deslocamento experimental para uma dada tolerância. Porém, dado que são consideradas leis com apenas dois parâmetros de calibração, não é utilizado qualquer algoritmo de otimização e a qualidade da aproximação será avaliada com base no erro relativo médio calculado sobre os pontos experimentais.

Para o procedimento de calibração são utilizados os resultados experimentais obtidos por Bao (2003) e reproduzidos por Malcher (2012) através de um provete axissimétrico não-entalhado (Figura 7.4). O deslocamento na fratura obtido experimentalmente foi de 6.65 mm e a curva força-deslocamento experimental encontra-se representada na Figura 7.8. Serão consideradas duas leis de endurecimento *standard* para caracterizar duas regiões da

lei de endurecimento do material, nomeadamente a Lei de Ludwik definida por

$$\sigma_y(\bar{\varepsilon}_p) = \sigma_{y_0} + \alpha e^{-\beta \bar{\varepsilon}_p}, \quad (7.1)$$

e a Lei de Voce definida por

$$\sigma_y(\bar{\varepsilon}_p) = \sigma_{y_0} + \alpha(1 - e^{-\beta \bar{\varepsilon}_p}), \quad (7.2)$$

em que para ambas as leis σ_{y_0} é a tensão de cedência inicial, $\bar{\varepsilon}_p$ é a deformação plástica equivalente acumulada e α , β são os parâmetros de calibração.

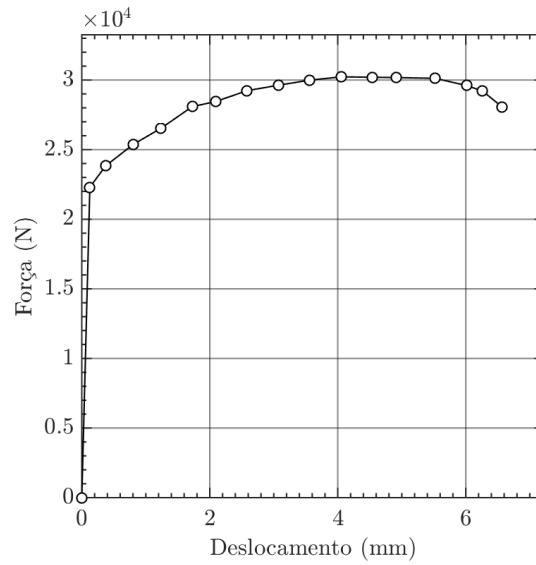


Figura 7.8: Curva força-deslocamento obtida experimentalmente no ensaio de tração uniaxial do provete axissimétrico não-entalhado (obtida através de digitalização da curva força-deslocamento experimental apresentada por Malcher (2012) e retirada de Bao (2003)).

7.3.3 Simulação numérica

Com base nas condições de simetria, apenas um oitavo da geometria (*gauge section*) do provete axissimétrico não-entalhado é modelada (ver Figura 7.9), impondo as condições de fronteira adequadas nos planos de simetria. Tal como em Bao (2003) e Malcher (2012), é considerada uma *gauge section* de 25.4 mm. Apesar de se tratar de um problema axissimétrico, de modo a manter a consistência com as análises que são realizadas posteriormente, é utilizado um modelo tridimensional discretizado em elementos hexaédricos de vinte nós com integração em oito pontos de Gauss. É definida uma malha suficientemente refinada com um total de 1125 elementos e 5461 nós (ver Figura 7.9) e o carregamento de tração uniaxial é imposto prescrevendo um deslocamento total de 7.0 mm. É considerado o modelo constitutivo de Gurson e são utilizados 100 incrementos de carga de modo a obter uma

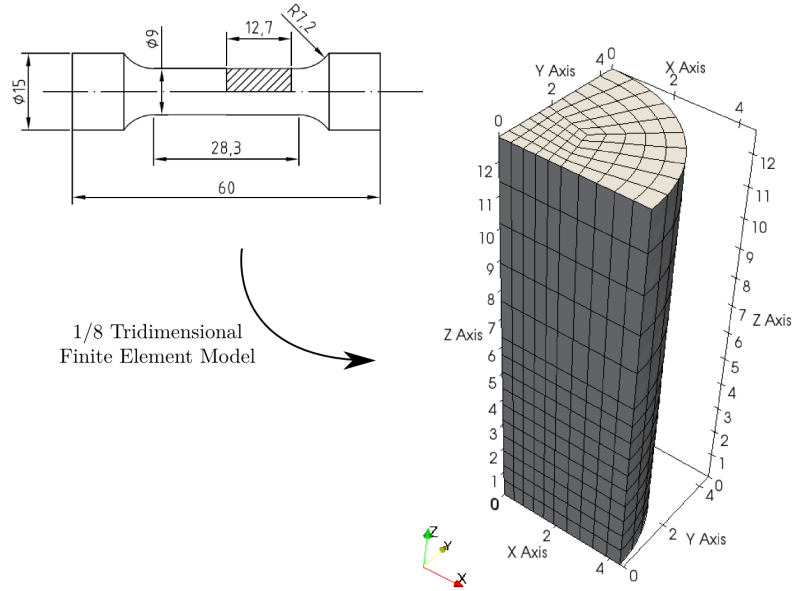
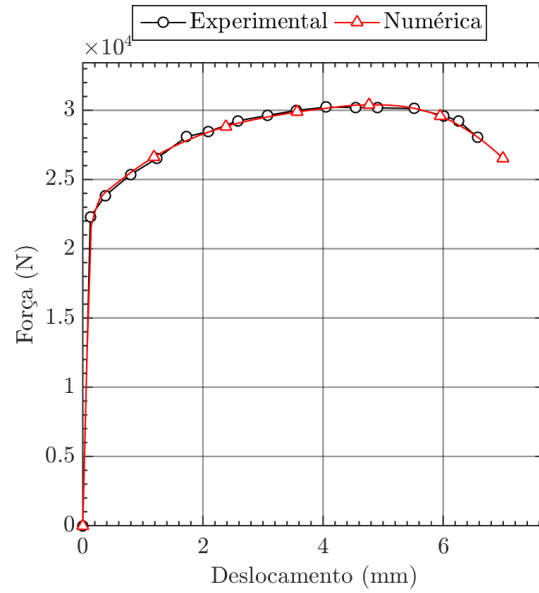


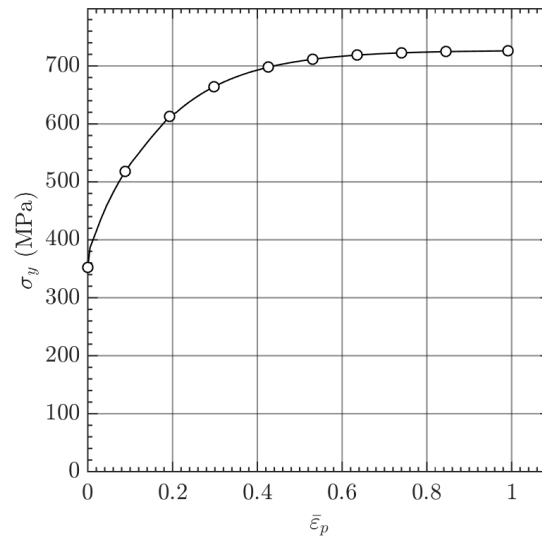
Figura 7.9: Modelo tridimensional de um oitavo da geometria (*gauge section*) do provete axissimétrico não-entalhado, discretizado numa malha de 1125 elementos hexaédricos de vinte nós.

curva força-deslocamento bem definida, sobretudo na região inicial de cedência plástica e na região final de fratura.

Na Figura 7.10(a) é apresentada a curva força-deslocamento obtida numericamente após o procedimento de calibração e pode verificar-se uma excelente correlação com a curva força-deslocamento obtida experimentalmente ($\bar{\epsilon}_r = 1.21\%$). A lei de endurecimento do material foi ajustada considerando a Lei de Ludwik no domínio $\bar{\epsilon}_p \in [0; 0.2]$ e a Lei de Voce no domínio $\bar{\epsilon}_p \in [0.2; 1.0]$, encontrando-se representada na Figura 7.10(b).



(a)



(b)

Figura 7.10: (a) Comparação das curvas força-deslocamento obtidas numericamente e experimentalmente no procedimento de calibração da lei de endurecimento do material com base num ensaio de tração uniaxial de um provete axissimétrico não-entalhado. (b) Lei de endurecimento calibrada da liga de alumínio 2024-T351.

7.4 Simulações numéricas

7.4.1 Parâmetros de simulação e limitações computacionais

Apesar da importância deste primeiro conjunto de análises na compreensão do comportamento do modelo de Gurson *per se* em diferentes regimes de triaxialidade, os resultados obtidos são a base comparativa da posterior avaliação da precisão do modelo através de um modelo multi-escala. Para que tal comparação seja o mais consistente e rigorosa possível, é desejável que parâmetros como a refinação da malha macroscópica e a incrementação do carregamento prescrito sejam idênticos em ambas as análises. Por este motivo, a definição dos parâmetros de simulação requer desde logo um cuidado acrescido e acarreta limitações decorrentes da atual capacidade computacional de simulação multi-escala. Apesar do recente *speed up* do programa LINKS alcançado por Lopes (2016), a natureza do algoritmo multi-escala, o estado de otimização computacional do programa e o *hardware* disponível resultam ainda em tempos de simulação consideráveis. Como valor indicativo, uma análise multi-escala preliminar de um provete borboleta discretizado em 350 elementos hexaédricos de vinte nós (oito pontos de integração de Gauss) e um EVR discretizado em 1500 elementos hexaédricos de vinte nós (oito pontos de integração de Gauss) demorou cerca de uma semana para concluir vinte incrementos prescritos. Face ao tempo disponível para os estudos previstos na presente dissertação, justifica-se a necessidade de uma escolha racional dos parâmetros de simulação numérica.

O primeiro aspeto a ser tomado em consideração é relativo à refinação da malha. Para cada um dos provetes considerados, averiguaram-se os resultados obtidos através de análises à macroescala, para uma malha próxima de 350 elementos hexaédricos de 20 nós com integração em oito pontos de Gauss. Em particular, verificou-se se as distribuições das variáveis de campo sofriam alterações significativas com o aumento da refinação da malha e se apresentavam descontinuidades. Em termos de *output*, a capacidade de observar a distribuição dos campos antes de ser realizada a média nodal revelou-se uma ferramenta bastante útil para este efeito. Concluiu-se que para todos os provetes seria possível considerar entre 350 e 400 elementos, o que é satisfatório do ponto de vista do tempo computacional das simulações multi-escala.

Estabelecida a refinação das malhas a utilizar, procurou-se definir o menor número de incrementos possível. Para um determinado deslocamento prescrito, o procedimento para cada um dos provetes foi essencialmente iterativo, começando com um total de 100 incrementos. A sucessiva redução do número de incrementos foi realizada averiguando se as distribuições das variáveis de campo e a curva força-deslocamento sofriam alterações significativas. Para um dado incremento, ultrapassado um número máximo de iterações pré-definido ou em caso de divergência do processo iterativo do Método de Newton-Raphson, o programa LINKS procede automaticamente a um corte do incremento prescrito (procedimento designado por sub-incrementação), aspeto que também foi naturalmente tomado em consideração. Considerando uma incrementação uniforme foi possível reduzir, de modo geral, o número de incrementos para cerca de 30. Verificou-se posteriormente que a consideração de uma incrementação não uniforme, mais refinada na região de cedência plástica e na região próxima da fratura, permitiu reduzir o número de incrementos para 20 na maioria dos provetes. Note-se que para além das questões mencionadas, a incrementação é particularmente importante na medida em que os resultados apenas são conhecidos no fim de cada incremento. Como será visto, nalguns casos o crescimento da variável de dano do modelo de Gurson é bastante acentuado após um determinado valor de deslocamento ser aplicado e, por este motivo, uma

incrementação mais refinada nesta região é também importante para acompanhar a evolução contínua do dano do material. Apesar do esforço de redução de incrementação, note-se que nada garante que na análise multi-escala não se verifique sub-incrementação.

Para além dos aspetos já mencionados, e atendendo a que serão somente realizadas simulações tridimensionais, procurou-se igualmente tirar o máximo partido das condições de simetria em cada um dos provetes, impondo para tal as condições de fronteira adequadas nos respetivos planos. Todos os provetes foram discretizados em malhas estruturadas de elementos hexaédricos de vinte nós com integração em oito pontos de Gauss. Em termos do modelo material é considerado o modelo constitutivo de Gurson ($f_0 = 1.0\%$) e a lei de endurecimento calibrada no Subcapítulo 7.3. O carregamento é aplicado na sua totalidade mediante prescrição de deslocamentos nas direções representadas nas Figuras 7.2-7.7. Nas Figuras 7.11-7.15 são, por último, apresentados os modelos de elementos finitos considerados para cada um dos provetes, sendo nas respetivas legendas indicada a refinação da malha e o número de incrementos.

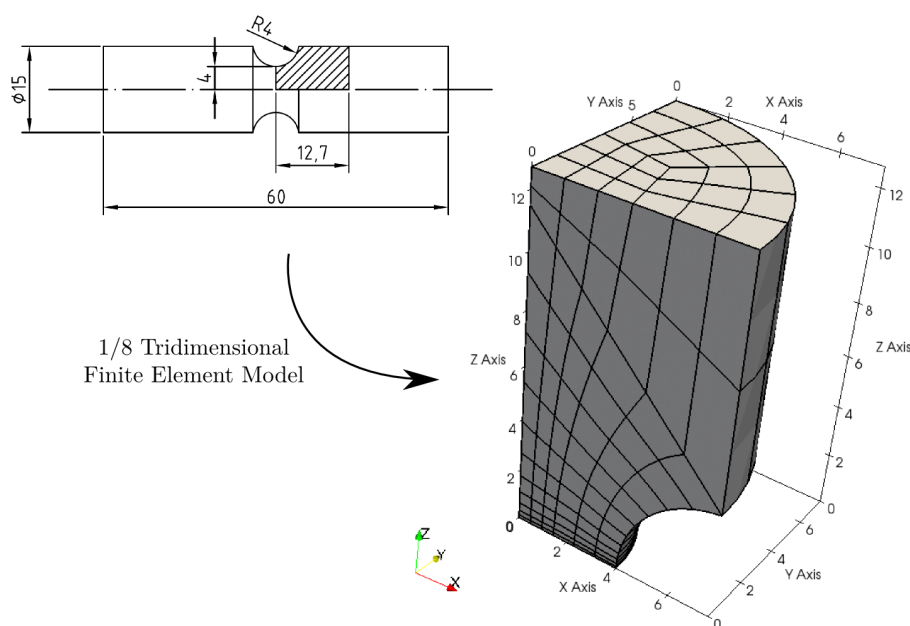


Figura 7.11: Modelo tridimensional de um oitavo da geometria (*gauge section*) do provete axissimétrico entalhado (entalhe de raio 4 mm), discretizado numa malha de 351 elementos hexaédricos de vinte nós. É considerado um total de 20 incrementos.

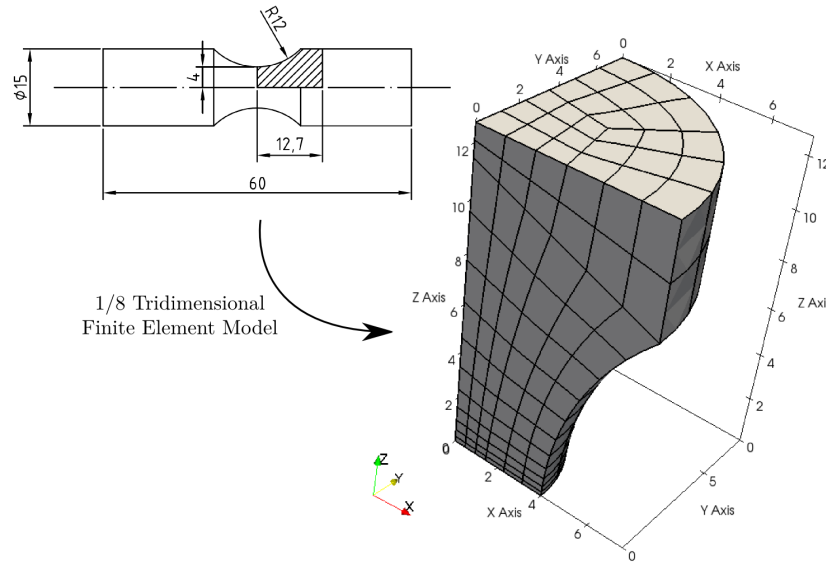


Figura 7.12: Modelo tridimensional de um oitavo da geometria (*gauge section*) do provete axissimétrico entalhado (entalhe de raio 12 mm), discretizado numa malha de 351 elementos hexaédricos de vinte nós. É considerado um total de 20 incrementos.

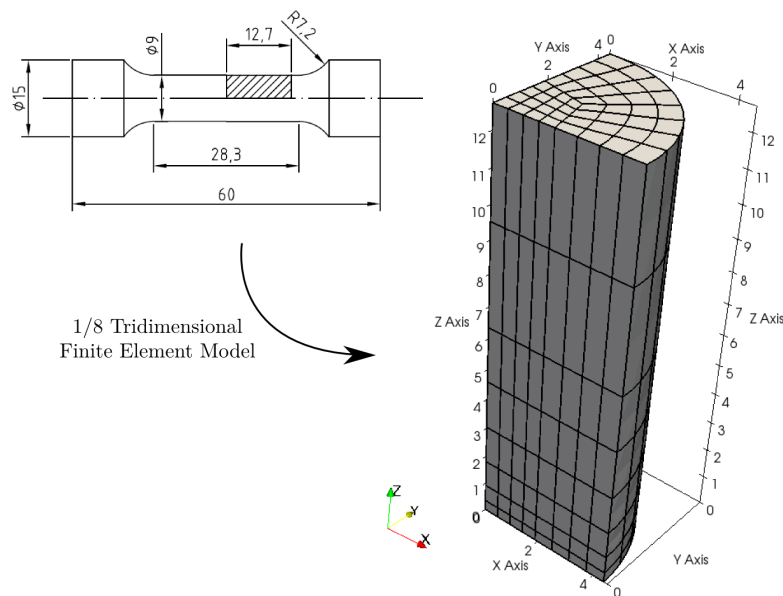


Figura 7.13: Modelo tridimensional de um oitavo da geometria (*gauge section*) do provete axissimétrico não-entalhado, discretizado numa malha de 384 elementos hexaédricos de vinte nós. É considerando um total de 30 incrementos.

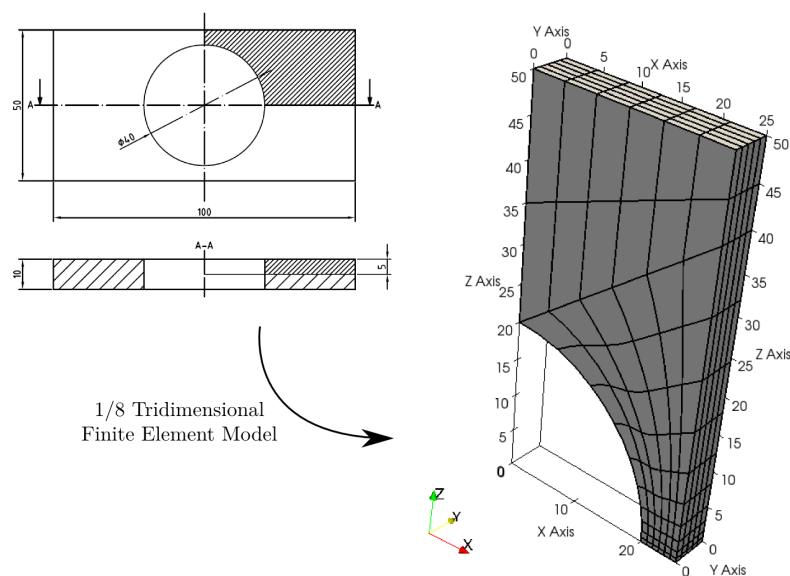


Figura 7.14: Modelo tridimensional de um oitavo da geometria do provete de placa com furo, discretizado numa malha de 360 elementos hexaédricos de vinte nós. É considerado um total de 20 incrementos.

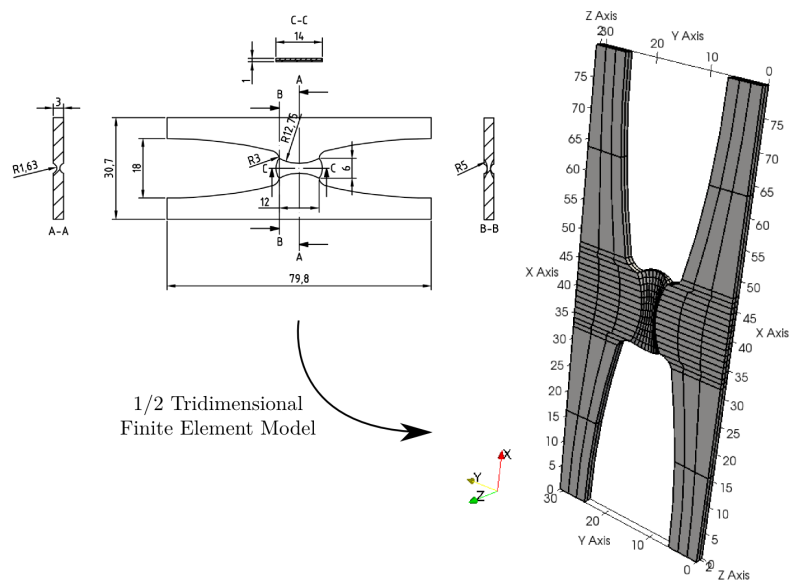


Figura 7.15: Modelo tridimensional de um meio da geometria do provete borboleta sujeito à solicitação combinada de tração e corte e à solicitação de corte puro, discretizado numa malha de 352 elementos hexaédricos de vinte nós. É considerado um total de 20 incrementos.

7.4.2 Referências experimentais e critério de paragem

Dado o principal objetivo da presente dissertação, é pertinente que as análises dos diversos provetes permitam avaliar a evolução de dano ao longo de todo o histórico de deformação que precede a respetiva fratura. Deste modo, é necessário definir qual a totalidade do deslocamento a prescrever em cada um dos provetes ou, por outras palavras, definir um determinado critério de paragem das simulações.

A presente dissertação seria idealmente complementada por uma forte componente empírica na qual seriam efetivamente realizados os ensaios experimentais correspondentes às simulações numéricas pretendidas. Para cada um dos provetes considerados, esta permitiria o conhecimento de dados pertinentes relativos ao comportamento real do material e à evolução da sua microestrutura, nomeadamente: a curva força-deslocamento, o deslocamento correspondente à fratura do provete, a localização da fratura e fractografias da superfície de fratura. Face ao tempo e aos recursos disponíveis, tal componente não pôde ser realizada, pelo que os estudos realizados restringem-se essencialmente ao domínio numérico. Apesar deste aspeto, de Bao (2003) e Bai (2008) é possível obter o local da fratura observado experimentalmente para todos os provetes (ver Tabela 7.2), o que permite realizar considerações sobre a localização de dano. As curvas força-deslocamento e o deslocamento previsto na fratura são somente conhecidos para alguns dos provetes, pelo que por uma questão de consistência não serão considerados.

Deste modo, para cada um dos regimes de triaxialidade foi adotado um critério de paragem. No regime de alta triaxialidade tomou-se como critério atingir um valor de porosidade (variável de dano do modelo de Gurson) próximo de 5%. Este valor é consistente com os valores de porosidade atingidos por metais e ligas metálicas estruturais após o início da coalescência de vazios e posterior fratura macroscópica (Benzerga and Leblond, 2010). No regime de baixa triaxialidade, representado pelas duas solicitações do provete borboleta, será visto que a evolução da porosidade prevista pelo modelo de Gurson é limitada. Por este motivo, apelou-se a alguma sensibilidade experimental e de simulação para impor um deslocamento suficientemente elevado que garantisse a aproximação ou mesmo a ocorrência de rotura do provete borboleta como resultado da deformação sofrida. Com base nalguns estudos preliminares tomou-se como critério de paragem um deslocamento imposto de 1.6mm.

7.5 Resultados obtidos

7.5.1 Proвете entalhado (R4)

A deformação sofrida pelo provete (ver Figura 7.16) é a esperada do ponto de vista físico, sendo possível observar que esta se concentra essencialmente na região do entalhe. Verifica-se ainda que a secção central do provete sofre uma estricção acentuada, fator que juntamente com a evolução de dano nesta região justifica o amaciamento registado na curva força-deslocamento obtida (ver Figura 7.17).

Nas Figuras 7.18 e 7.19 encontram-se representadas, respetivamente, a distribuição da porosidade e da deformação total equivalente acumulada para a totalidade do deslocamento prescrito. Na Figura 7.18 encontram-se ainda indicadas as posições aproximadas dos cinco pontos de integração de Gauss criteriosamente selecionados e onde serão analisadas as variáveis de interesse (ver Figura 7.20).

Tabela 7.2: Localização da fratura observada experimentalmente para os diferentes provetes considerados em liga de alumínio 2024-T351 (Bao (2003), Bai (2008)).

Provete	Localização da Fratura
Entalhado (R4)	Centro do provete
Entalhado (R12)	Centro do provete
Não-entalhado	Centro do provete
Placa com furo	Meio da espessura da secção crítica
Borboleta ($\alpha = 10^\circ$)	Meio da espessura da região central de corte
Borboleta ($\alpha = 0^\circ$)	Superfície da região central de corte

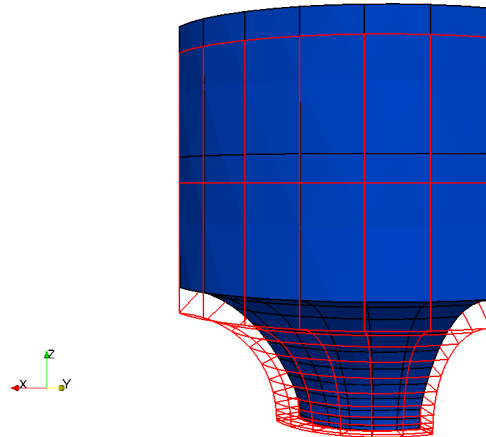


Figura 7.16: Configuração de referência (vermelho) e configuração deformada (azul) do provete entalhado (R4) para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.76$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

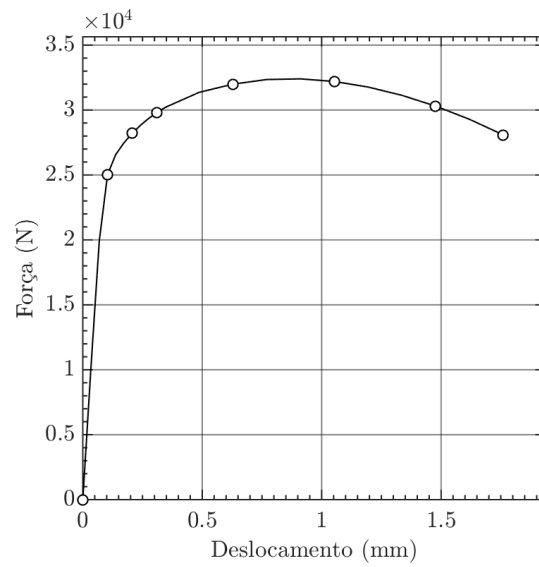


Figura 7.17: Curva força-deslocamento obtida numericamente para o provete entalhado (R4).

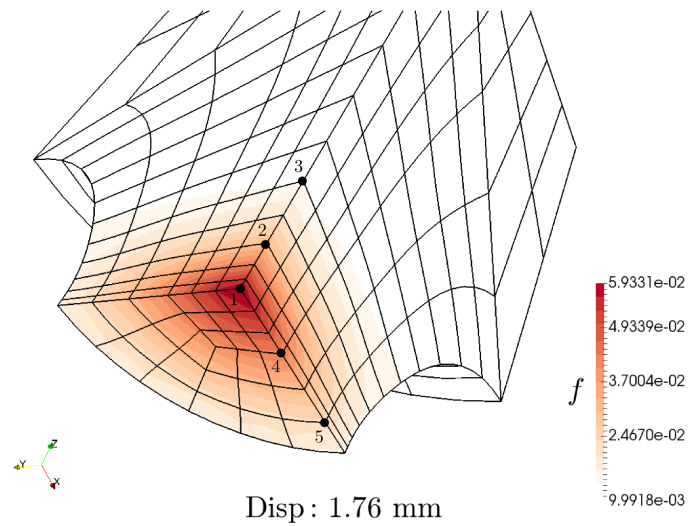


Figura 7.18: Distribuição da porosidade no provete entalhado (R4) para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.76$ mm) e representação das posições aproximadas dos pontos de Gauss para pós-processamento. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

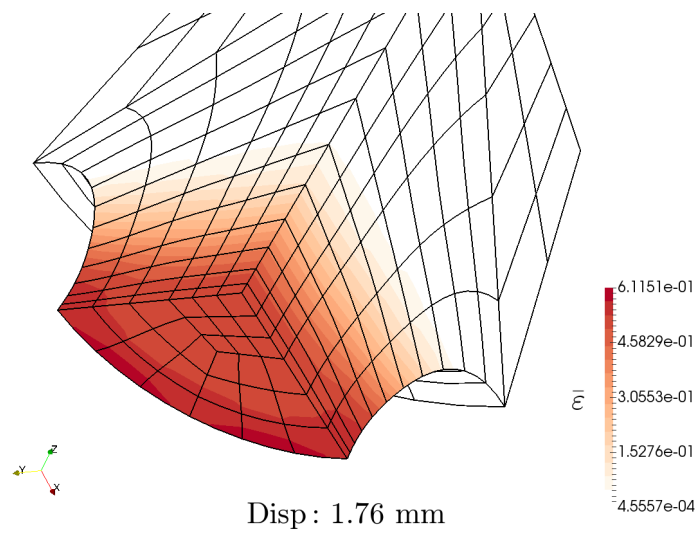


Figura 7.19: Distribuição da deformação total equivalente no provete entalhado (R4) para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.76$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

Em consistência com a deformação sofrida pelo provete (ver Figura 7.16), quer a porosidade quer a deformação total equivalente concentram-se na região entalhada. Em relação à primeira, note-se na Figura 7.18 que a localização do dano na região central do provete é bem evidente e, segundo o modelo de Gurson, a fratura do provete ocorre no ponto central do provete, o que está de acordo com as observações experimentais (ver Tabela 7.2). No entanto, a deformação total equivalente não apresenta a mesma distribuição, sendo o seu valor máximo registado na periferia da secção central (ver Figura 7.19). Nesta região existe uma ligeira falha de axissimetria na distribuição da variável, o que se acredita resultar de uma ‘má’ precisão geométrica do *software* de geração de malha na definição dos pontos intermédios da circunferência. Atendendo às Figuras 7.20(a)-7.20(d) podem notar-se os seguintes aspetos:

- *Triaxialidade e Parâmetro do Ângulo de Lode.* Como resultado da concentração de tensões induzida pelo entalhe, em todos os pontos de Gauss registam-se valores médios de triaxialidade altos (ver Tabela 7.3). Em particular, no ponto de Gauss crítico (GP 1) pode verificar-se que de facto $T_0 \approx 0.75$ e que é atingido um valor máximo $T \approx 1.3$. Note-se ainda que, somente nos pontos de Gauss localizados sobre a secção central do provete (GP 1, GP 4 e GP 5), se verifica um crescimento monótono após $u \approx 1$ mm, o que é consistente com a localização do dano discutida em seguida. Em relação ao parâmetro do ângulo de Lode, os valores médios são bastante próximos de 1 em todos os pontos de Gauss, o que é consistente com um estado axissimétrico de tração generalizado.

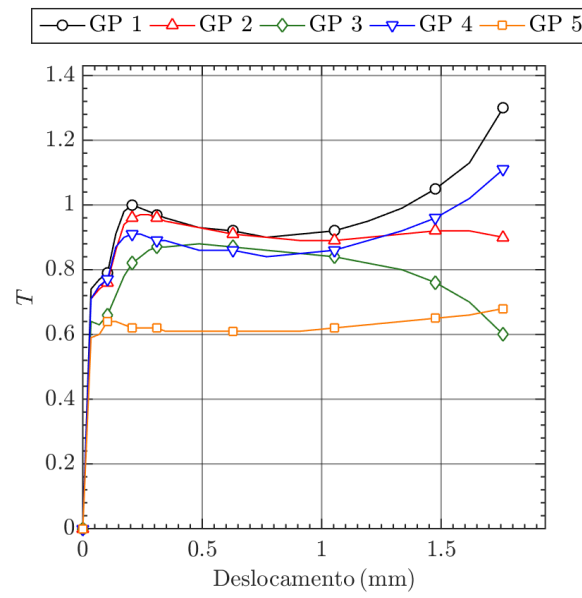
Tabela 7.3: Triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode médios para cada ponto de Gauss analisado no provete entalhado (R4).

GP	T_{med}	$\bar{\theta}_{\text{med}}$
1	1.02	1.00
2	0.91	1.00
3	0.82	1.00
4	0.93	0.99
5	0.63	0.95

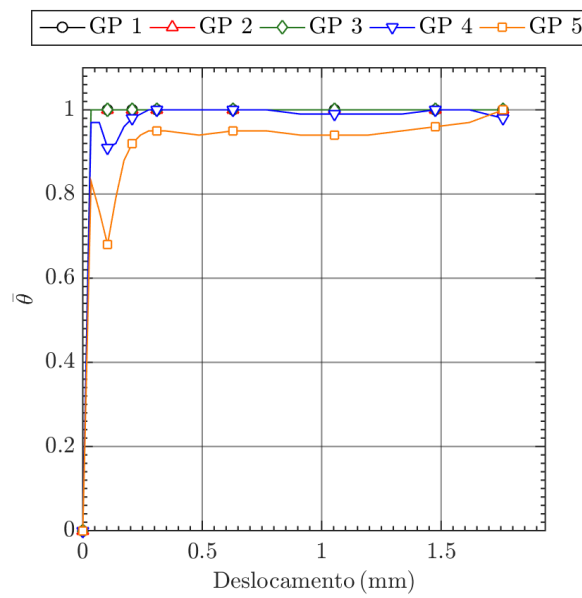
- *Porosidade e Deformação Total Equivalente.* A evolução da porosidade nos diferentes pontos de Gauss diverge quase desde o início da solicitação ($u < 0.5$ mm). Atendendo à posição dos pontos de Gauss, a comparação entre as curvas dos pontos GP 2 e GP 3 com as curvas dos pontos GP 4 e GP 5 permite concluir que a localização do dano ocorre sobretudo segundo a secção transversal (em relação à direção de solicitação). Note-se que a porosidade no ponto GP 3 sofre um aumento muito reduzido e que, apesar da sua maior proximidade ao ponto central, a porosidade atingida no ponto GP 2 é bastante inferior àquela atingida no ponto GP 4 (ver Tabela 7.4). Para além disso, nos pontos GP 1 e GP 4 ocorre um aumento exponencial da porosidade, particularmente acentuado para $u > 1$ mm. A comparação das curvas da deformação total equivalente evidencia também uma evolução mais significativa dos pontos de Gauss localizados sobre a secção central transversal (GP 1, GP 4 e GP 5). A evolução das curvas destes pontos é no entanto bastante mais próxima do que no caso da porosidade, verificando-se uma tendência de crescimento aproximadamente linear.

Tabela 7.4: Porosidade e deformação total equivalente em cada ponto de Gauss analisado no provete entalhado (R4) para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.76$ mm).

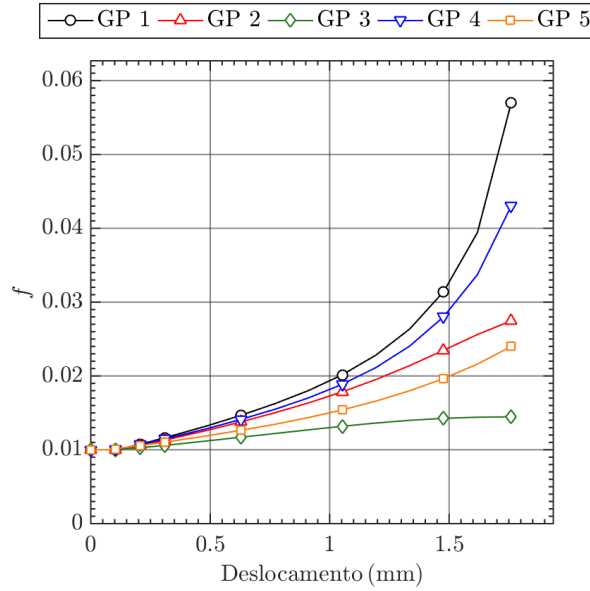
GP	$f(\%)$	$\bar{\varepsilon}$
1	5.70	0.52
2	2.75	0.37
3	1.45	0.16
4	4.30	0.51
5	2.40	0.53



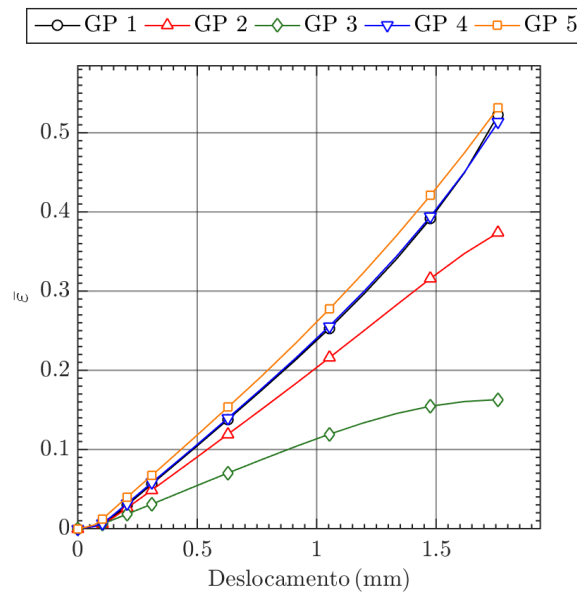
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 7.20: Análise da evolução das variáveis de interesse nos pontos de Gauss selecionados para o provete entalhado (R4): (a) triaxialidade; (b) parâmetro do ângulo de Lode; (c) porosidade; (d) deformação total equivalente.

7.5.2 Provete entalhado (R12)

A deformação sofrida pelo provete (ver Figura 7.21) é a esperada do ponto de vista físico, sendo possível observar que esta se concentra essencialmente na região do entalhe. A secção central do provete sofre mais uma vez uma estricção acentuada, fator que juntamente com a evolução de dano contribui para o amaciamento registado na curva força-deslocamento obtida (ver Figura 7.22).

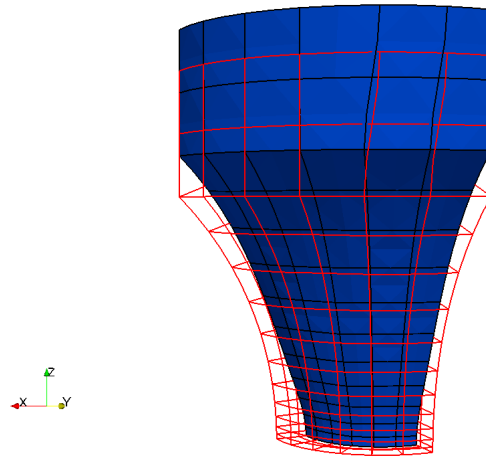


Figura 7.21: Configuração de referência (vermelho) e configuração deformada (azul) do provete entalhado (R12) para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 2.76$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

Nas Figuras 7.23 e 7.24 encontram-se representadas, respetivamente, a distribuição da porosidade e da deformação total equivalente acumulada para a totalidade do deslocamento prescrito. Na Figura 7.23 estão também indicadas as posições aproximadas dos cinco pontos de integração de Gauss criteriosamente selecionados e onde serão analisadas as variáveis de interesse (ver Figura 7.25).

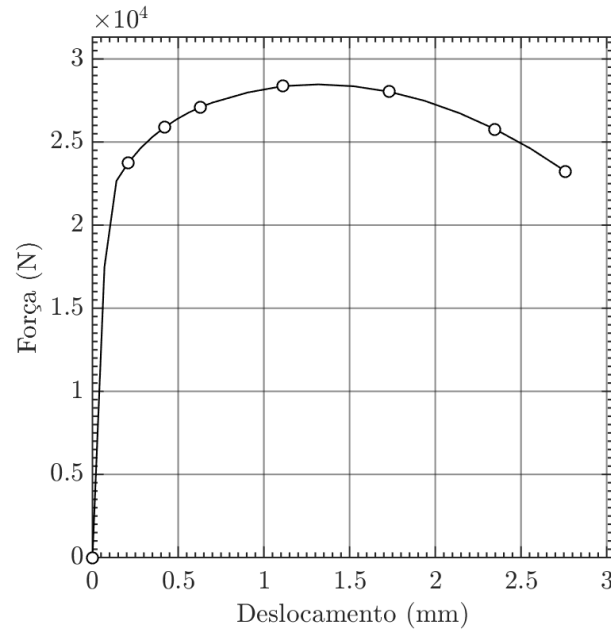


Figura 7.22: Curva força-deslocamento obtida numericamente para o provete entalhado (R12).

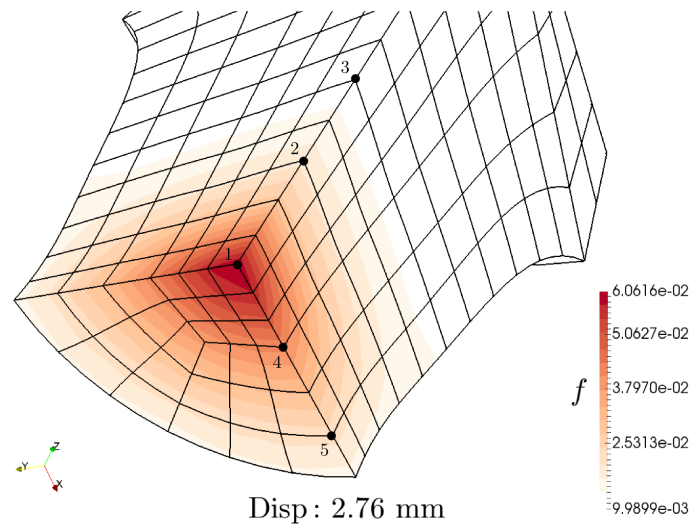


Figura 7.23: Distribuição da porosidade no provete entalhado (R12) para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 2.76$ mm) e representação das posições aproximadas dos pontos de Gauss para pós-processamento. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

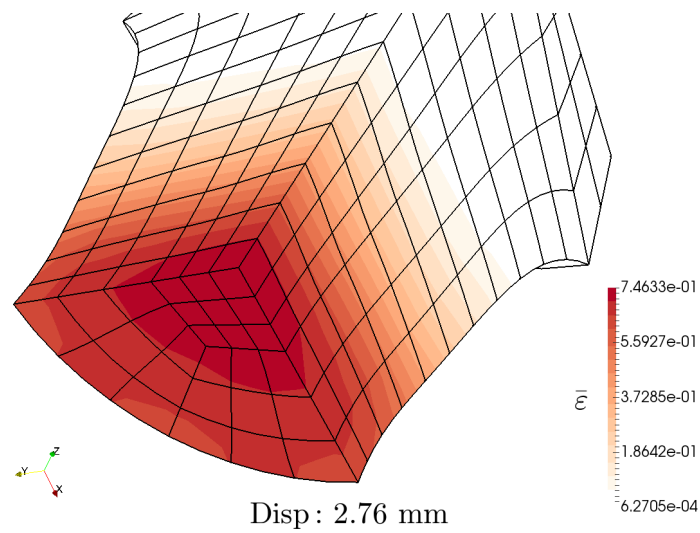


Figura 7.24: Distribuição da deformação total equivalente no provete entalhado (R12) para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 2.76$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

Em consistência com a deformação sofrida pelo provete (ver Figura 7.21) verifica-se que, quer a porosidade quer a deformação total equivalente, concentram-se na região entalhada. De acordo com a Figura 7.23 é previsto que a fratura do provete segundo o modelo de Gurson ocorre no ponto central do provete, o que está de acordo com as observações experimentais (ver Tabela 7.2). Ao contrário do provete entalhado (R4), a deformação total equivalente apresenta também o seu valor máximo no ponto central do provete (ver Figura 7.24). Atendendo às Figuras 7.25(a)-7.25(d) podem notar-se os seguintes:

- *Triaxialidade e Parâmetro do Ângulo de Lode.* Face à diminuição da concentração de tensões em relação ao provete entalhado (R4) (aumento do raio de curvatura do entalhe), os valores médios de triaxialidade são inferiores, apesar de manter um valor alto como expectável (ver Tabela 7.5). Em particular, no ponto de Gauss crítico (GP 1) pode verificar-se que de facto $T_0 \approx 0.47$ e que é atingido um valor máximo $T \approx 1.1$. A evolução das curvas é idêntica à verificada no provete entalhado (R4), ocorrendo em termos gerais uma translação vertical descendente das mesmas. Note-se porém que o decréscimo final de triaxialidade associado aos pontos GP 2 e GP 3 é agora mais acentuado, sendo que neste último é mesmo atingido um valor negativo, ainda que baixo (estado dominante de compressão). Verificou-se que nesta região do provete surgem tensões radiais de compressão resultantes da estricção do provete, o que justifica a evolução das curvas nos dois pontos mencionados. Em relação ao parâmetro do ângulo de Lode, os valores médios são de novo bastante próximos de 1 em todos os pontos de Gauss, o que é consistente com um estado axissimétrico de tração generalizado.

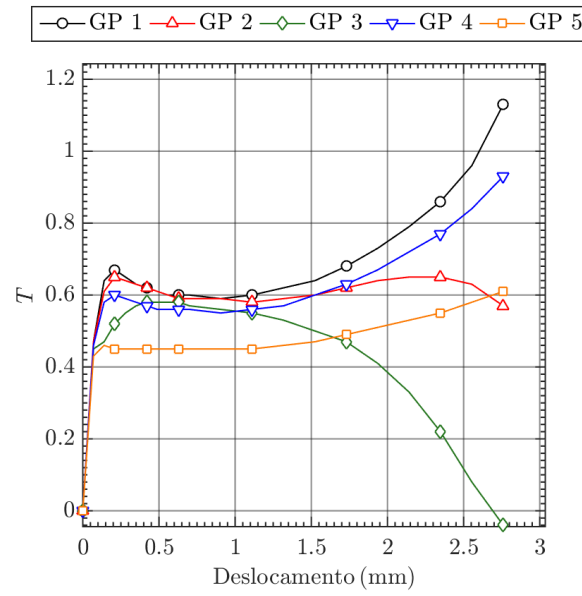
Tabela 7.5: Triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode médios para cada ponto de Gauss analisado no provete entalhado (R12).

GP	T_{med}	$\bar{\theta}_{\text{med}}$
1	0.78	1.00
2	0.61	1.00
3	0.52	1.00
4	0.69	0.99
5	0.51	0.98

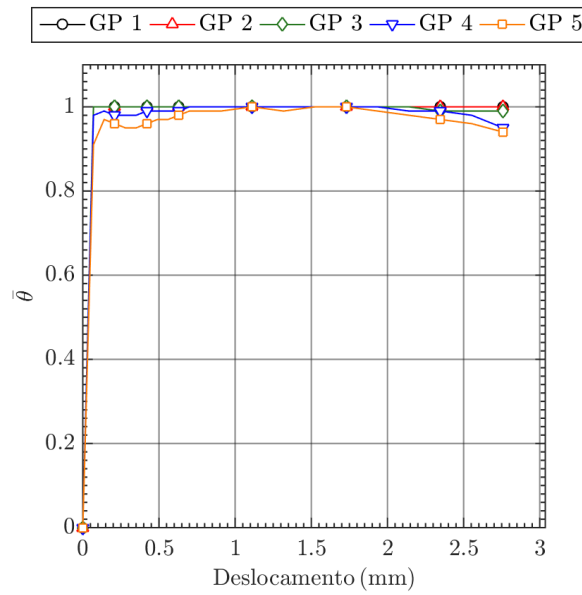
- *Porosidade e Deformação Total Equivalente.* A evolução das curvas de porosidade é praticamente semelhante à verificada no provete entalhado (R4), pelo que os comentários realizados previamente são aqui aplicáveis. Como resultado da diminuição dos valores médios de triaxialidade, o valor de deslocamento prescrito necessário para atingir o mesmo valor de dano no ponto crítico é bastante superior. Este aspeto é totalmente consistente com a lei de evolução da porosidade do modelo de Gurson, na qual se verifica que a taxa de evolução do dano é diretamente proporcional ao valor de triaxialidade. Neste caso verifica-se ainda que, para a totalidade do deslocamento prescrito, o valor de porosidade atingido no ponto GP 5 é superior ao valor atingido no ponto GP 2 (ver Tabela 7.6), o que evidencia bem a localização do dano segundo a direção transversal (em relação à direção de solicitação). A evolução das curvas da deformação total equivalente é essencialmente idêntica à do provete entalhado (R4), sendo porém o valor máximo agora atingido no ponto central do provete.

Tabela 7.6: Porosidade e deformação total equivalente em cada ponto de Gauss analisado no provete entalhado (R12) para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 2.76$ mm).

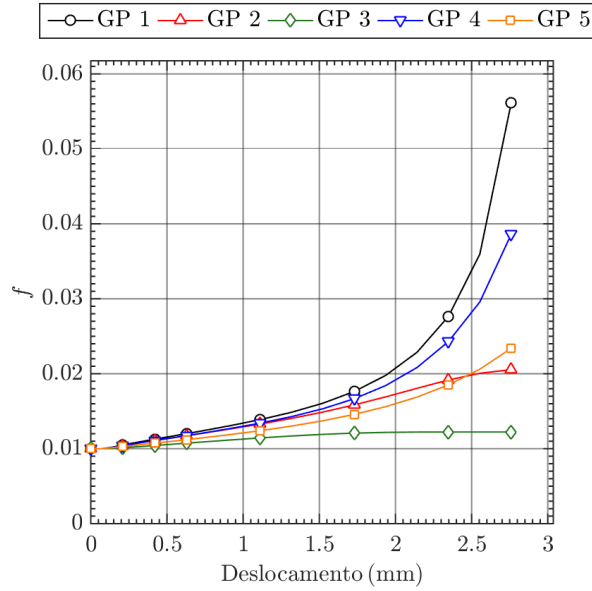
GP	$f(\%)$	$\bar{\varepsilon}$
1	5.61	0.74
2	2.05	0.46
3	1.22	0.16
4	3.86	0.71
5	2.34	0.67



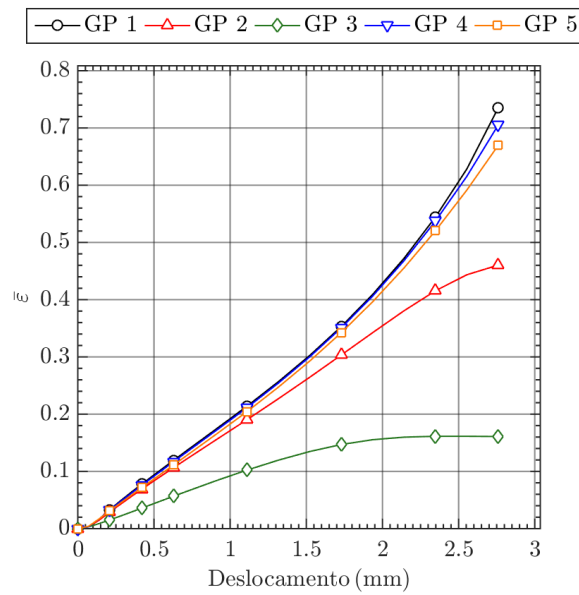
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 7.25: Análise da evolução das variáveis de interesse nos pontos de Gauss selecionados para o provete entalhado (R12): (a) triaxialidade; (b) parâmetro do ângulo de Lode; (c) porosidade; (d) deformação total equivalente.

7.5.3 Provete não-entalhado

A deformação sofrida pelo provete (ver Figura 7.26) é a esperada do ponto de vista físico, sendo notória a estrição sofrida pelo mesmo na secção central. A curva força-deslocamento (ver Figura 7.27) é também consistente, capturando a perda de capacidade de carga do provete associada à redução da secção resistente e à evolução do estado de dano do material.

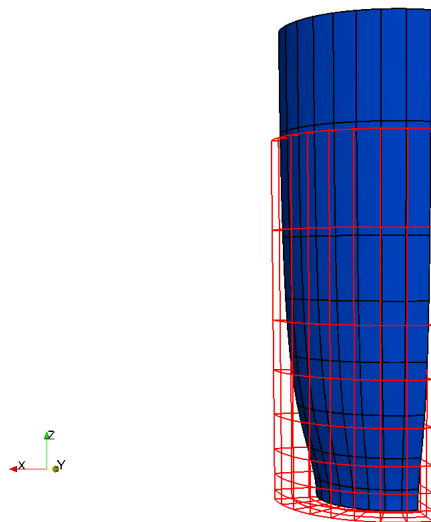


Figura 7.26: Configuração de referência (vermelho) e configuração deformada (azul) do provete não-entalhado para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 7.80$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

Nas Figuras 7.28 e 7.29 encontram-se representadas, respetivamente, a distribuição da porosidade e da deformação total equivalente acumulada para a totalidade do deslocamento prescrito. Na Figura 7.28 encontram-se ainda indicadas as posições dos cinco pontos de integração de Gauss criteriosamente selecionados e onde serão analisadas as variáveis de interesse (ver Figura 7.31).

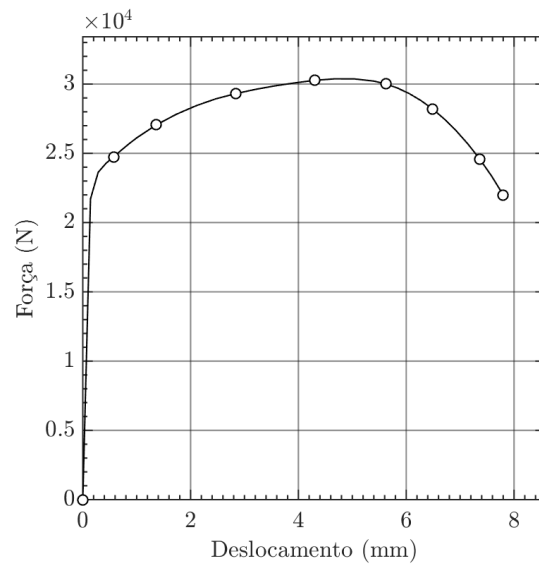


Figura 7.27: Curva força-deslocamento obtidas numericamente para o provete não-entalhado.

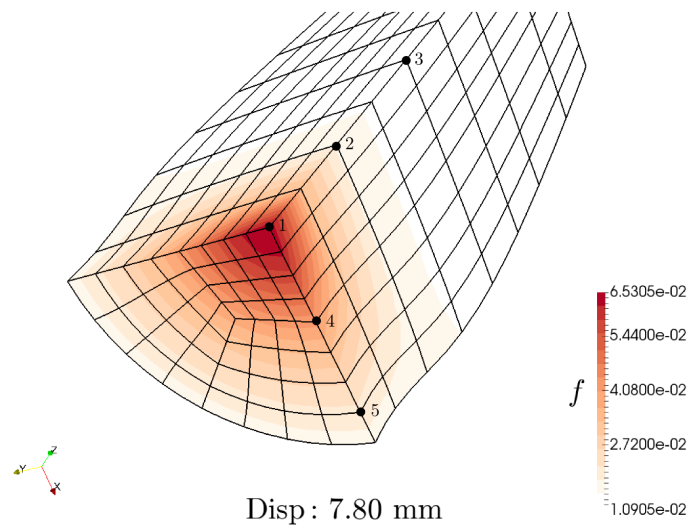


Figura 7.28: Distribuição da porosidade no provete não-entalhado para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 7.80$ mm) e representação das posições aproximadas dos pontos de Gauss para pós-processamento. Fator de escala de deformação $\times 1,0$.

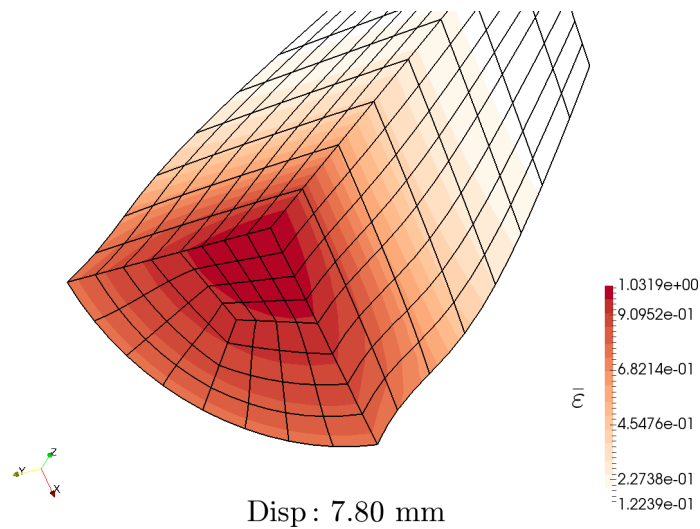


Figura 7.29: Distribuição da deformação total equivalente no provete não-entalhado para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 7.80$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

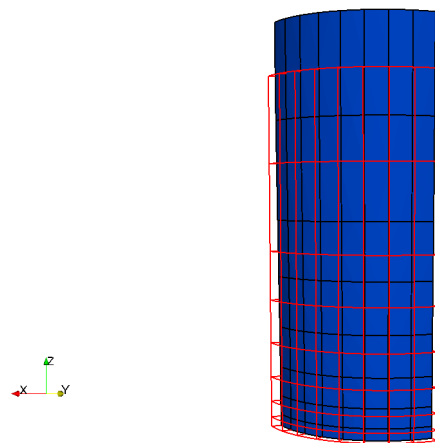


Figura 7.30: Configuração de referência (vermelho) e configuração deformada (azul) do provete não-entalhado para um deslocamento prescrito ($u \approx 4.0$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

Como seria de esperar, a porosidade e a deformação total equivalente concentram-se na região central onde o provete sofre uma estricção acentuada. As distribuições de ambas as variáveis apresentam o seu valor máximo no ponto central do provete, verificando-se porém que a localização da variável de dano é mais pronunciada. Constata-se então que, segundo o modelo de Gurson, a fratura ocorre no ponto central do provete, o que está de acordo com as observações experimentais (ver Tabela 7.2). Atendendo às Figuras 7.31(a)-7.31(d) podem notar-se os seguintes aspetos:

- *Triaxialidade e Parâmetro do Ângulo de Lode.* Em relação aos provetes entalhados verifica-se uma diminuição significativa dos valores médios de triaxialidade (ver Tabela 7.7). Em particular, o valor de triaxialidade mantém-se constante e aproximadamente igual a $1/3$ até cerca de $u \approx 4.0$ mm, valor que, como já referido no Capítulo 5, caracteriza efetivamente um estado de tração uniaxial. Note-se que para $u \approx 4.0$ mm ainda não se existe qualquer estricção (ver Figura 7.30), justificando-se assim os aspetos mencionados. Após o início da estricção, as curvas de triaxialidade dos diferentes pontos de Gauss principiam a divergir e apresentam uma evolução semelhante à verificada para o provete entalhado (R12). Observa-se, mais uma vez, que somente nos pontos de Gauss localizados sobre a secção central do provete (GP 1, GP 4 e GP 5) ocorre um crescimento monótono da triaxialidade, sendo este particularmente acentuado nos dois primeiros. Em relação aos pontos GP 2 e GP 3, verifica-se um decréscimo acentuado da triaxialidade e, neste último, é atingido um valor alto de triaxialidade em compressão. Nesta região do provete surgem tensões radiais de compressão significativas resultantes da estricção acentuada do provete, o que justifica a evolução das curvas nos pontos mencionados. Em relação ao parâmetro do ângulo de Lode, os valores médios são bastante próximos de 1 em todos os pontos de Gauss, o que é consistente com um estado axissimétrico de tração generalizado.

Tabela 7.7: Triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode médios para cada ponto de Gauss analisado no provete não-entalhado.

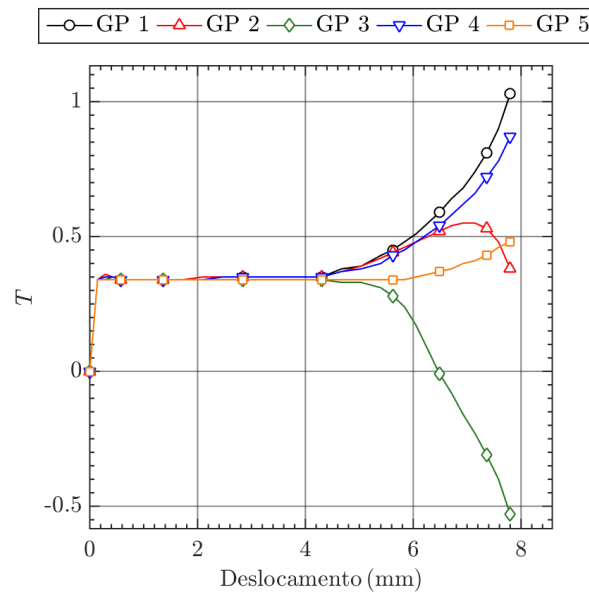
GP	T_{med}	$\bar{\theta}_{\text{med}}$
1	0.62	1.00
2	0.44	1.00
3	0.34	1.00
4	0.56	0.98
5	0.38	0.91

- *Porosidade e Deformação Total Equivalente.* Em todos os pontos de Gauss a porosidade mantém-se praticamente constante ($f \approx 1.1\%$) e apresenta um crescimento quase nulo até cerca de $u \approx 4.0$ mm. Este aspeto é consistente com a evolução de triaxialidade já comentada. Após o início da estricção, as curvas de triaxialidade dos diferentes pontos de Gauss principiam a divergir e apresentam uma evolução semelhante à verificada para o provete entalhado (R12). Apesar da divergência e do crescimento de dano serem retardados pelo início da estricção do provete, é curioso notar que a taxa de evolução da porosidade nos diferentes pontos de Gauss é semelhante à verificada nos provetes entalhados. Note-se, porém, que o valor de deslocamento prescrito necessário para atingir o mesmo valor de dano no ponto crítico é muito superior ao aplicado nos

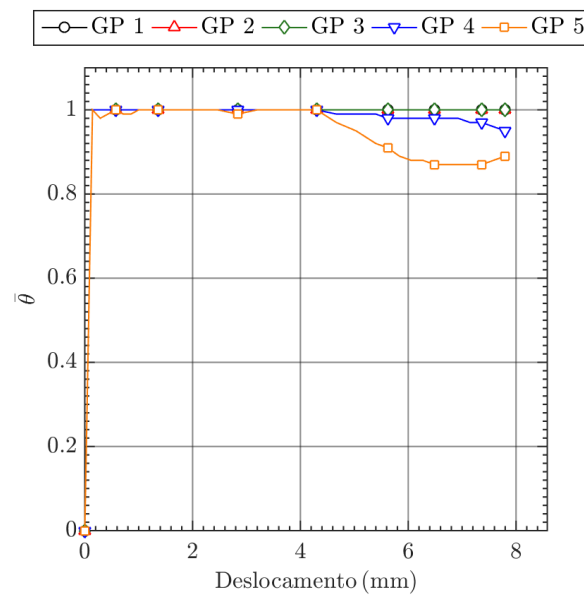
provetes entalhados. Em relação às curvas de deformação total equivalente verifica-se também a divergência após o início da estrição do provete ($u \approx 4.0$ mm) e posteriormente uma evolução semelhante à obtida para o provete entalhado (R12). Neste caso, a curva associada ao ponto GP 2 acompanha porém o crescimento das curvas dos pontos GP 1, GP 4 e GP 5 até próximo da totalidade do deslocamento prescrito.

Tabela 7.8: Porosidade e deformação total equivalente em cada ponto de Gauss analisado no provete não-entalhado para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 7.80$ mm).

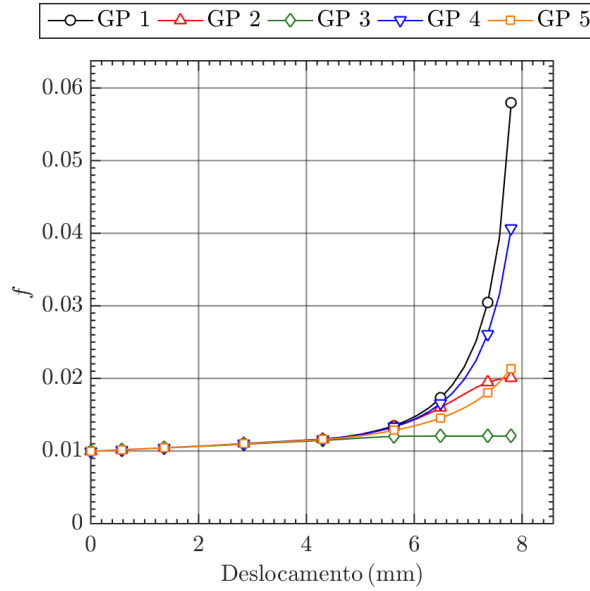
GP	$f(\%)$	$\bar{\varepsilon}$
1	5.80	1.00
2	2.01	0.66
3	1.21	0.25
4	4.07	0.95
5	2.14	0.84



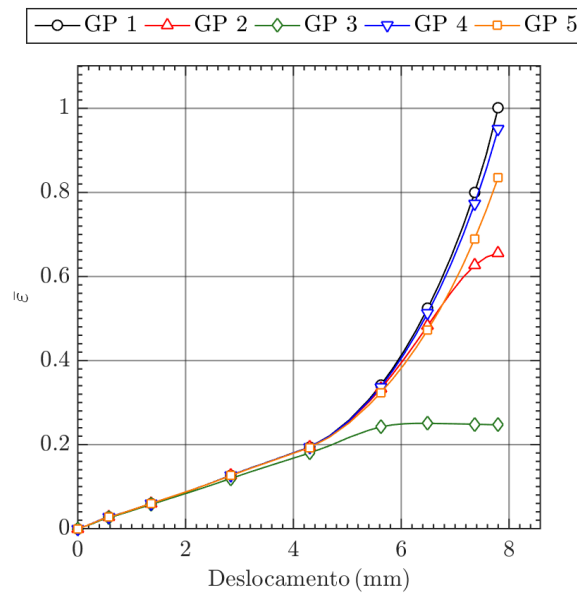
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 7.31: Análise da evolução das variáveis de interesse nos pontos de Gauss selecionados para o provete não-entalhado: (a) triaxialidade; (b) parâmetro do ângulo de Lode; (c) porosidade; (d) deformação total equivalente.

7.5.4 Provete de placa com furo

A deformação sofrida pelo provete (ver Figura 7.32) é a esperada do ponto de vista físico, verificando-se a ovalização do furo na direção do carregamento e uma estricção acentuada da secção crítica do provete. Note-se que, como consequência da ovalização do furo (superfície interior), a estricção ocorre essencialmente pelas superfícies exteriores do provete. Tal como nos provetes anteriores, a curva força-deslocamento (ver Figura 7.33) evolui da forma esperada, capturando a perda de capacidade de carga associada à estricção da região crítica do provete e à evolução do dano aí registada.

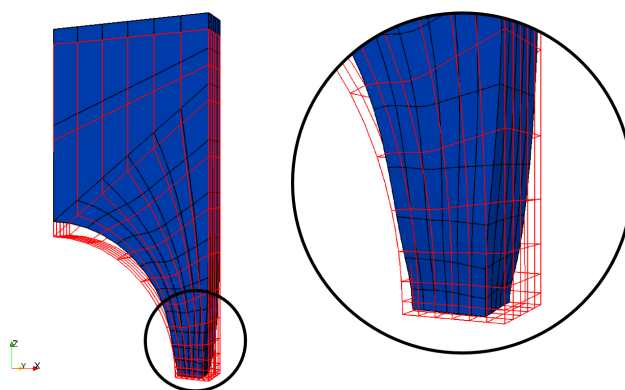


Figura 7.32: Configuração de referência (vermelho) e configuração deformada (azul) do provete de placa com furo para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 4.70$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

Nas Figuras 7.34 e 7.35 encontram-se representadas, respetivamente, a distribuição da porosidade e da deformação total equivalente acumulada para a totalidade do deslocamento prescrito. Na Figura 7.34 encontram-se ainda indicadas as posições aproximadas dos cinco pontos de integração de Gauss criteriosamente selecionados e onde serão analisadas as variáveis de interesse (ver Figura 7.36).

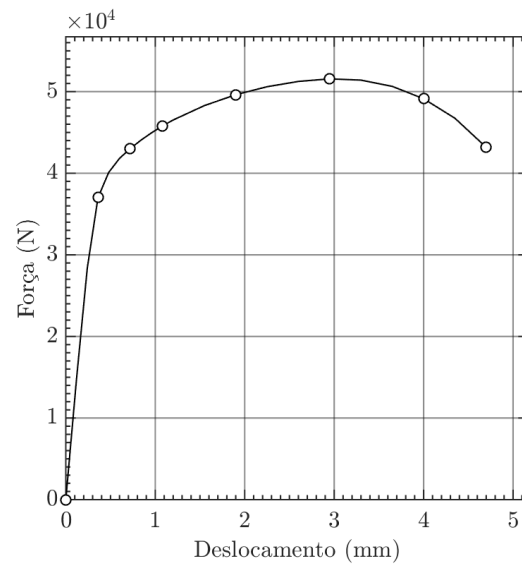


Figura 7.33: Curva força-deslocamento obtida numericamente para o provete de placa com furo.

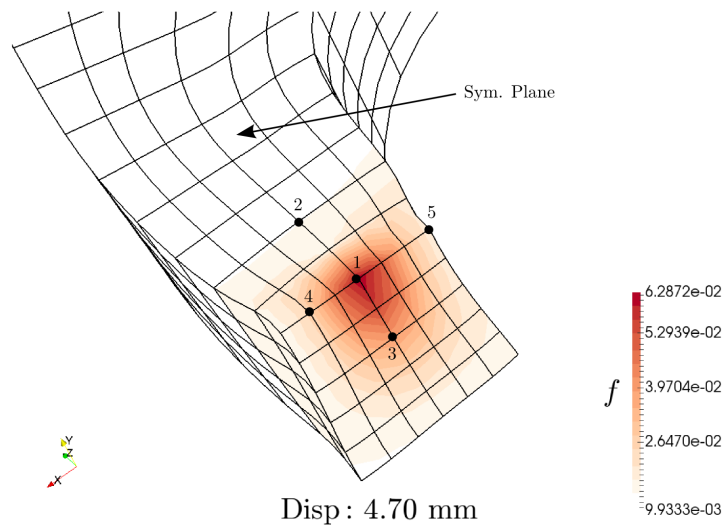


Figura 7.34: Distribuição da porosidade no provete de placa com furo para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 4.70$ mm) e representação das posições aproximadas dos pontos de Gauss para pós-processamento. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

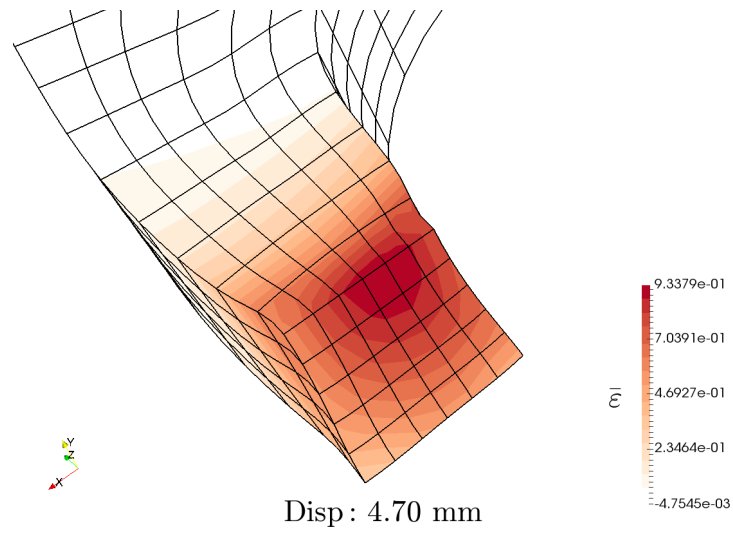


Figura 7.35: Distribuição da deformação total equivalente no provete de placa com furo para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 4.70$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

Como é possível observar, a porosidade e a deformação total equivalente concentram-se na secção do provete que sofreu uma estricção acentuada. Apesar das distribuições de ambas as variáveis serem idênticas, apresentando o seu valor máximo a meio da espessura do provete, verifica-se que a localização da variável de dano é mais pronunciada. Conclui-se então que segundo o modelo de Gurson a fratura ocorre a meio da espessura na secção crítica do provete, o que está de acordo com as observações experimentais (ver Subcapítulo 7.4.2). Atendendo às Figuras 7.36(a)-7.36(d) podem retirar-se as seguintes conclusões:

- *Triaxialidade e Parâmetro do Ângulo de Lode.* Os valores médios de triaxialidade (ver Tabela 7.9) são semelhantes aos encontrados no provete não-entalhado e pode notar-se que no ponto de Gauss crítico (GP 1) se tem de facto $T_0 \approx 0.37$. Em todos os pontos de Gauss localizados sobre a secção crítica do provete (GP 1, GP 3, GP 4, GP 5) ocorre um crescimento monótono de triaxialidade após $u \approx 3$ mm, enquanto que no ponto GP 2 se verifica um decréscimo acentuado. Esta evolução é de certa forma consistente com as observações já realizadas para os provetes axissimétricos. Em relação ao parâmetro do ângulo de Lode, os valores médios são agora inferiores a 1 e apresentam uma tendência decrescente para valores característicos entre um estado axissimétrico de tração generalizado e um estado de corte generalizado.

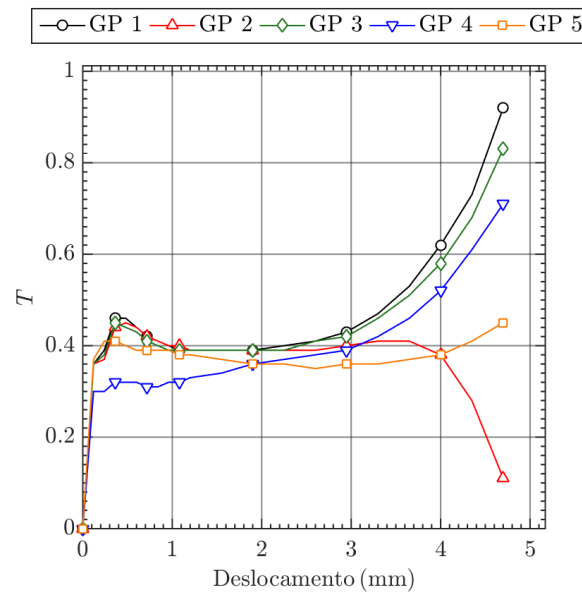
Tabela 7.9: Triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode médios para cada ponto de Gauss analisado no provete de placa com furo.

GP	T_{med}	$\bar{\theta}_{\text{med}}$
1	0.62	0.72
2	0.40	0.92
3	0.57	0.76
4	0.51	0.76
5	0.39	0.86

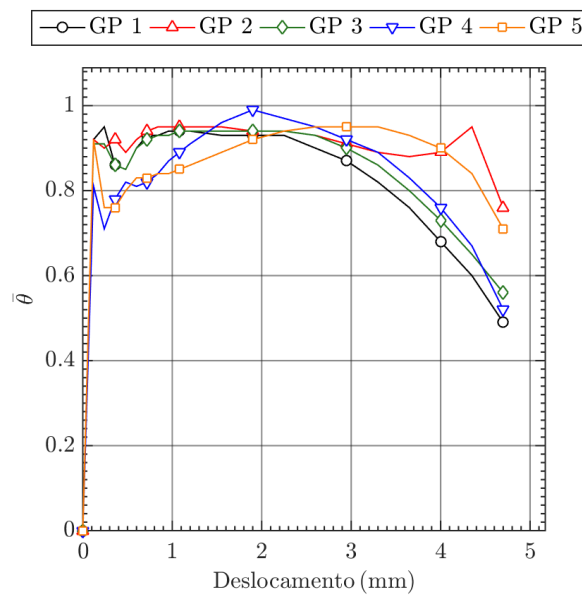
- *Porosidade e Deformação Total Equivalente.* À semelhança do provete não-entalhado, as curvas de evolução de dano evoluem lentamente e a sua divergência ocorre somente após $u \approx 3$ mm. Apesar da proximidade das curvas até este valor de deslocamento, é curioso notar que o valor da variável de dano era máximo na superfície do furo (ponto GP 5). Posteriormente ocorre um crescimento exponencial da porosidade e, atendendo à posição dos pontos de Gauss, a comparação entre as curvas dos pontos GP 1, GP 3, GP 4 e GP 5 com a curva dos ponto GP 2 permite evidenciar que a localização de dano ocorre sobretudo segundo a direção transversal (em relação à direção de sollicitação), em particular na direção da espessura do provete. Em relação à deformação total equivalente, a divergência das curvas inicia-se praticamente desde o início da sollicitação, sendo porém atingidos valores finais relativamente próximos nos pontos da secção crítica do provete (ver Tabela 7.10). Observa-se que o valor máximo da deformação total equivalente é máximo na superfície do furo (ponto GP 5) até $u \approx 4.2$ mm.

Tabela 7.10: Porosidade e deformação total equivalente em cada ponto de Gauss analisado no provete de placa com furo para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 4.70$ mm).

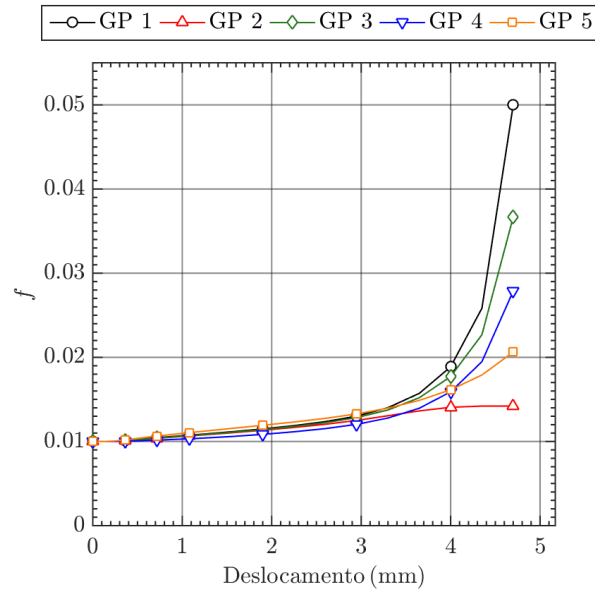
GP	$f(\%)$	$\bar{\varepsilon}$
1	5.00	0.86
2	1.42	0.38
3	3.67	0.80
4	2.79	0.74
5	2.06	0.77



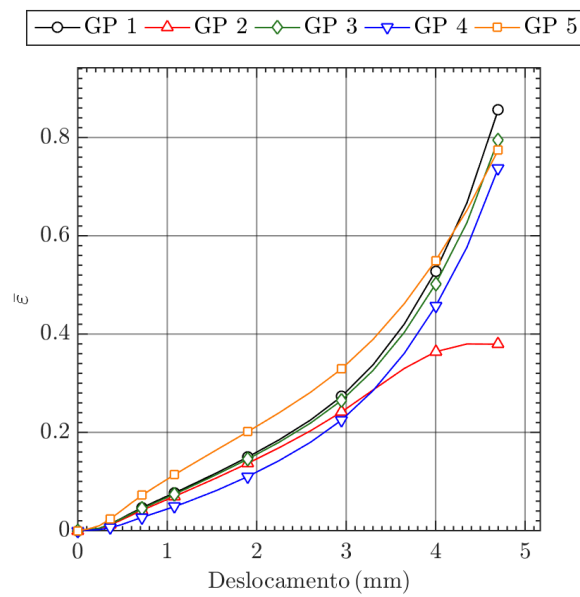
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 7.36: Análise da evolução das variáveis de interesse nos pontos de Gauss selecionados para o provete de placa com furo: (a) triaxialidade; (b) parâmetro do ângulo de Lode; (c) porosidade; (d) deformação total equivalente.

7.5.5 Provete borboleta ($\alpha = 10^\circ$)

Face à solicitação combinada de tração e corte ($\alpha = 10^\circ$), a deformação sofrida pelo provete borboleta (ver Figura 7.37) é a esperada do ponto de vista físico. Note-se ainda que a deformação se restringe à região central do provete tal como previsto no seu desenvolvimento por Bai (2008), aspeto também evidente nas distribuições de porosidade e de deformação total equivalente que serão analisadas. Para melhor justificar o critério de paragem indicado no Subcapítulo 7.4.2, apela-se a alguma sensibilidade experimental e de simulação para verificar que o provete é sujeito a uma deformação significativa e certamente já sofreu ou encontra-se próximo da rotura para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.6 \text{ mm}$). Ao contrário dos provetes analisados no regime de alta triaxialidade, neste caso não ocorre qualquer amaciamento da curva força-deslocamento que evidencie a perda da capacidade de carga do provete. Porém, não devem ser retiradas conclusões precipitadas em relação a este aspeto. De facto, em Bai (2008) verifica-se para o aço A710 que a curva força-deslocamento experimental apresenta uma evolução idêntica, ocorrendo somente uma perda da capacidade de carga abrupta no instante imediatamente precedente à rotura do provete.

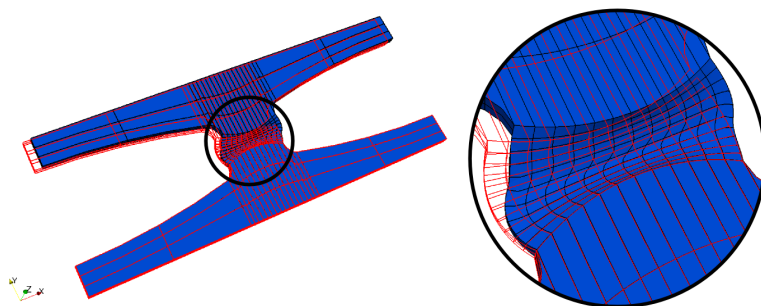


Figura 7.37: Configuração de referência (vermelho) e configuração deformada (azul) do provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte ($\alpha = 10^\circ$) para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.60 \text{ mm}$). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

Nas Figuras 7.39 e 7.40 encontram-se representadas, respetivamente, a distribuição da porosidade e da deformação total equivalente acumulada para a totalidade do deslocamento prescrito. Na Figura 7.39 encontram-se ainda indicadas as posições aproximadas dos cinco pontos de integração de Gauss criteriosamente selecionados e onde serão analisadas as variáveis de interesse (ver Figura 7.41).

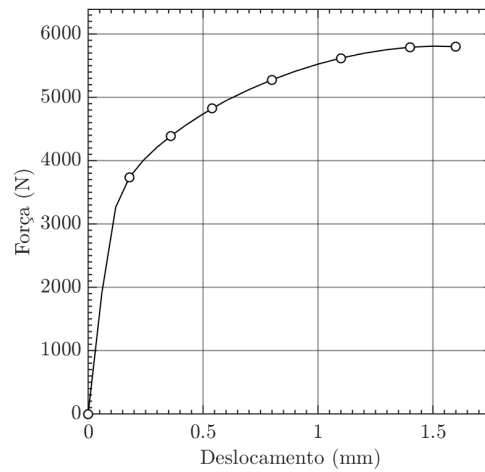


Figura 7.38: Curva força-deslocamento obtida numericamente para o provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte.

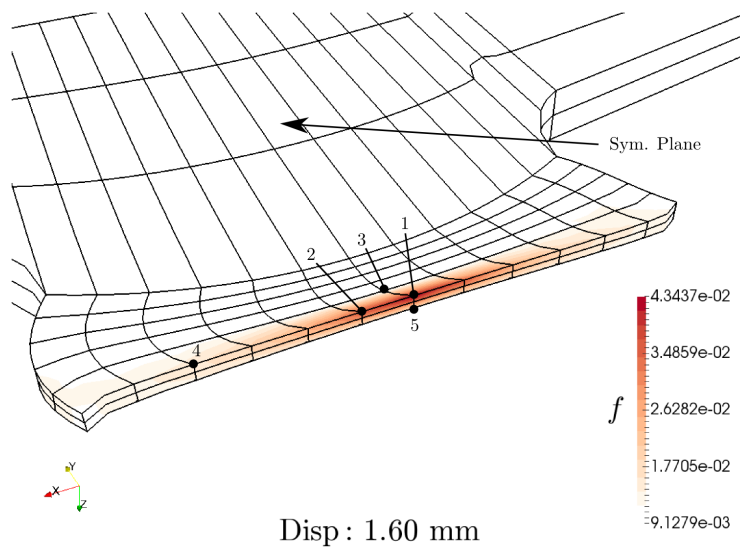


Figura 7.39: Distribuição da porosidade no provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.60$ mm) e representação das posições aproximadas dos pontos de Gauss para pós-processamento. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

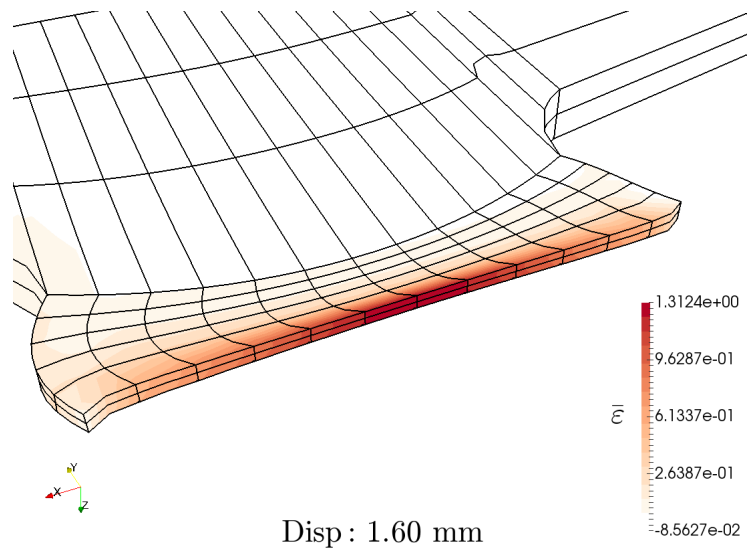


Figura 7.40: Distribuição da deformação total equivalente no provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.60$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

Como é possível observar, a porosidade encontra-se extremamente localizada e apresenta o seu valor máximo no ponto central do provete. Este aspeto é consistente com as observações experimentais (ver Tabela 7.2) que indicam que a fratura do provete ocorre nesse ponto. No entanto, note-se que, mesmo para a totalidade do deslocamento prescrito, a variável de dano não evoluiu para além de $f \approx 3\%$ nos dois pontos centrais do provete. Por sua vez, apesar da localização não ser tão pronunciada, a distribuição da deformação total equivalente concentra-se ao longo da espessura da secção central do provete. Atendendo às Figuras 7.41(a)-7.25(d) podem notar-se os seguintes aspetos:

- *Triaxialidade e Parâmetro do Ângulo de Lode.* Os valores médios de triaxialidade (ver Tabela 7.11) são indicativos de um regime de baixa triaxialidade, verificando-se apenas valores ligeiramente superiores a 0.33 nos pontos GP 1 e GP 2. O aumento de triaxialidade registado nestes pontos é de certa forma consistente com o facto da solicitação ter uma componente de tração, sendo esta resultante da direção de aplicação da força. Constata-se ainda que no ponto de Gauss crítico (GP 1) se tem de facto $T_0 \approx 0.11$. Em relação ao parâmetro do ângulo de Lode, os valores médios são em todos os pontos de Gauss próximos de 0.5, valor intermédio entre um estado axissimétrico de tração generalizado e um estado de corte generalizado.

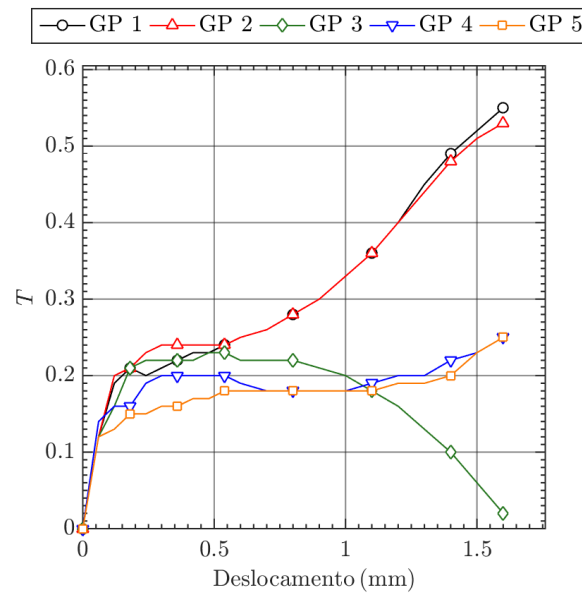
Tabela 7.11: Triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode médios para cada ponto de Gauss analisado no provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte.

GP	T_{med}	$\bar{\theta}_{\text{med}}$
1	0.38	0.51
2	0.38	0.50
3	0.20	0.49
4	0.20	0.45
5	0.19	0.47

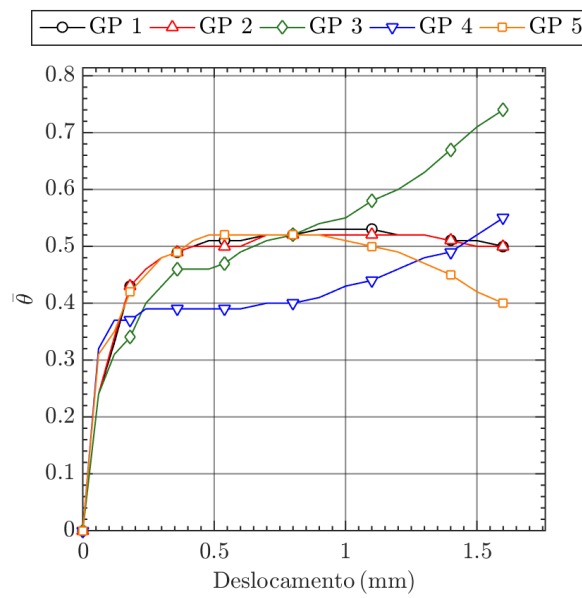
- *Porosidade e Deformação Total Equivalente.* A evolução das curvas da variável de dano é totalmente consistente com as respetivas curvas de triaxialidade já comentadas. À exceção dos dois pontos próximos do ponto central do provete (GP 1 e GP 2), nos quais a porosidade apresenta uma taxa de crescimento apreciável, a evolução do dano nos restantes pontos é bastante reduzida e mantém-se abaixo de 2% mesmo para a totalidade do deslocamento prescrito (ver Tabela 7.12). Em contraste, à exceção do ponto GP 3 que se encontra fora do plano de simetria xz , verifica-se que as curvas de deformação total equivalente crescem de forma acentuada, sobretudo nos pontos localizados na região central (GP 1, GP 2 e GP 5). Note-se que nestes três pontos o valor da deformação total equivalente superou os valores atingidos em todos os provetes anteriores, o que fundamenta igualmente que o deslocamento prescrito foi suficiente para provocar ou conduzir o provete a um estado próximo da fratura.

Tabela 7.12: Porosidade e deformação total equivalente em cada ponto de Gauss analisado no provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.60$ mm).

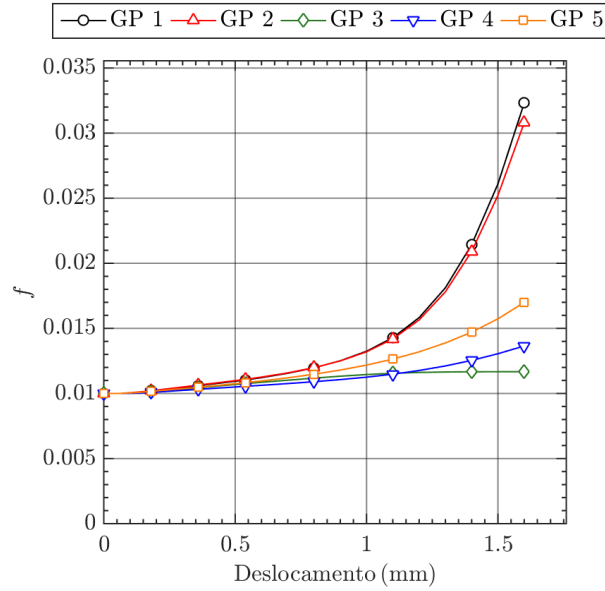
GP	$f(\%)$	$\bar{\varepsilon}$
1	3.23	1.08
2	3.08	1.06
3	1.17	0.34
4	1.36	0.65
5	1.70	1.06



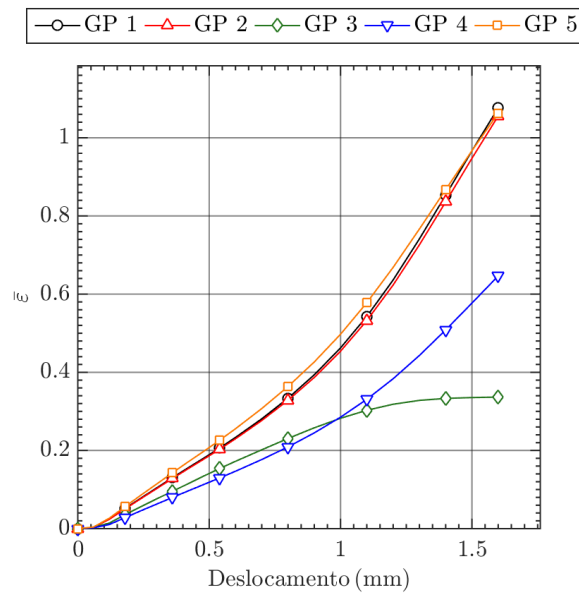
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 7.41: Análise da evolução das variáveis de interesse nos pontos de Gauss selecionados para o provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte: (a) triaxialidade; (b) parâmetro do ângulo de Lode; (c) porosidade; (d) deformação total equivalente.

7.5.6 Provete borboleta ($\alpha = 0^\circ$)

Face à solicitação de corte puro ($\alpha = 0^\circ$), a deformação sofrida pelo provete borboleta (ver Figura 7.42) é a esperada do ponto de vista físico. Note-se, mais uma vez, que a deformação se restringe à região central do provete tal como previsto no seu desenvolvimento por (Bai, 2008). Os comentários discutidos no caso anterior relativos ao critério de paragem e à curva força-deslocamento são aqui igualmente aplicáveis, sendo imposto um deslocamento prescrito ($u = 1.6\text{mm}$) que se considera ser suficiente para que o provete sofra ou se aproxime da rotura.

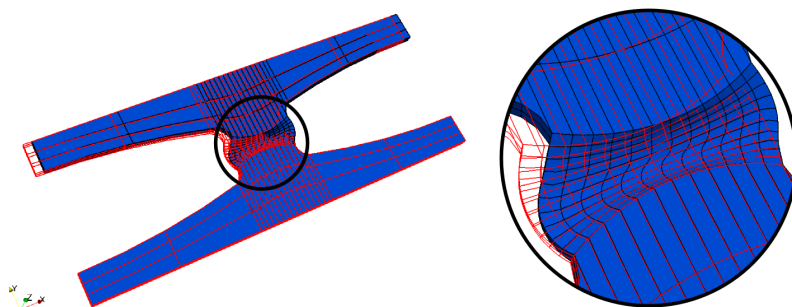


Figura 7.42: Configuração de referência (vermelho) e configuração deformada (azul) do provete borboleta em solicitação de corte puro ($\alpha = 0^\circ$) para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.60\text{ mm}$). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

Nas Figuras 7.44 e 7.45 encontram-se representadas, respetivamente, a distribuição da porosidade e da deformação total equivalente acumulada para a totalidade do deslocamento prescrito. Na Figura 7.44 encontram-se ainda indicadas as posições aproximadas dos cinco pontos de integração de Gauss criteriosamente selecionados e onde serão analisadas as variáveis de interesse (ver Figura 7.46). Deve referir-se que estes são exatamente os mesmos pontos analisados no caso anterior.

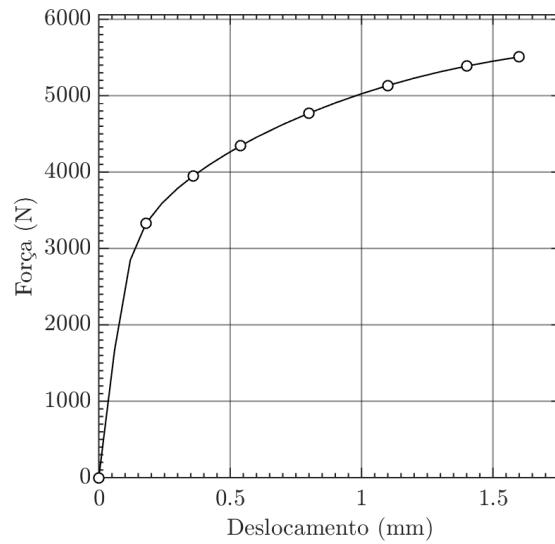


Figura 7.43: Curva força-deslocamento obtida numericamente para o provete borboleta em solicitação de corte puro.

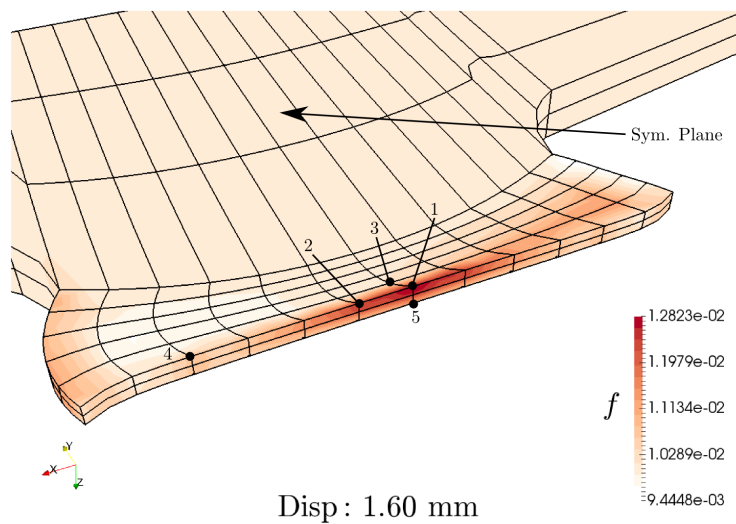


Figura 7.44: Distribuição da porosidade no provete borboleta em solicitação de corte puro para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1,60$ mm) e representação das posições aproximadas dos pontos de Gauss para pós-processamento. Fator de escala de deformação $\times 1,0$.

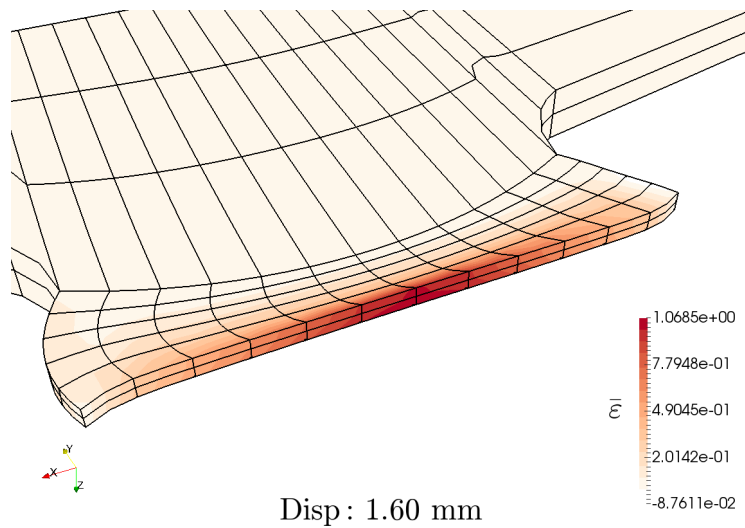


Figura 7.45: Distribuição da deformação total equivalente no provete borboleta em solicitação de corte puro para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.60$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

Em primeiro lugar, pode observar-se que a distribuição de porosidade apresenta o seu valor máximo no ponto central do provete. Este aspeto não é consistente com as observações experimentais (ver Tabela 7.2), as quais indicam que a fratura ocorre na superfície. Para além disso, note-se que, mesmo para o nível de deformação imposto ao provete, não ocorre verdadeiramente localização de dano, sendo o valor máximo atingido bastante reduzido ($f \approx 1.3\%$). Por sua vez, a distribuição da deformação total equivalente é idêntica ao caso anterior, concentrando-se ao longo da espessura da secção central do provete. Atendendo às Figuras 7.46(a)-7.46(d) podem notar-se os seguintes aspetos:

- *Triaxialidade e Parâmetro do Ângulo de Lode.* Tal como seria de esperar, os valores médios de triaxialidade (ver Tabela 7.13) são bastante próximos de 0, valor correspondente a um estado de corte puro. Note-se que em todos os pontos de Gauss se tem de facto $T_0 \approx 0$. Em relação ao parâmetro do ângulo de Lode observam-se também valores médios próximos de zero, o que é perfeitamente consistente com um estado de corte generalizado.

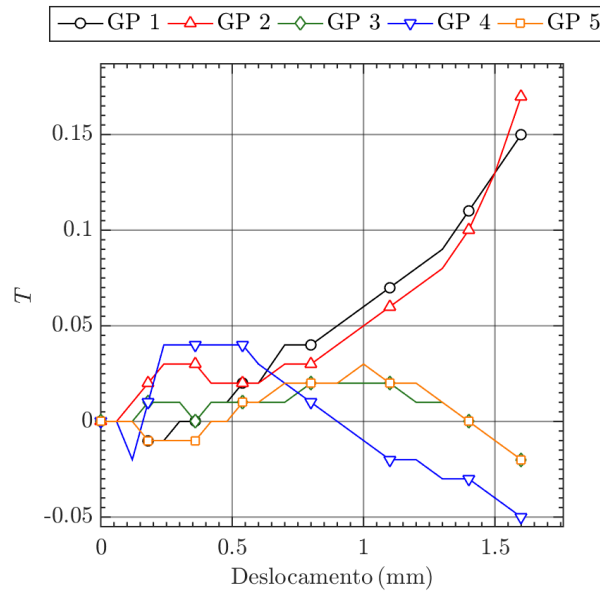
Tabela 7.13: Triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode médios para cada ponto de Gauss analisado no provete borboleta em solicitação de corte puro.

GP	T_{med}	$\bar{\theta}_{\text{med}}$
1	0.07	0.09
2	0.07	0.09
3	0.01	0.07
4	0.00	0.05
5	0.00	0.08

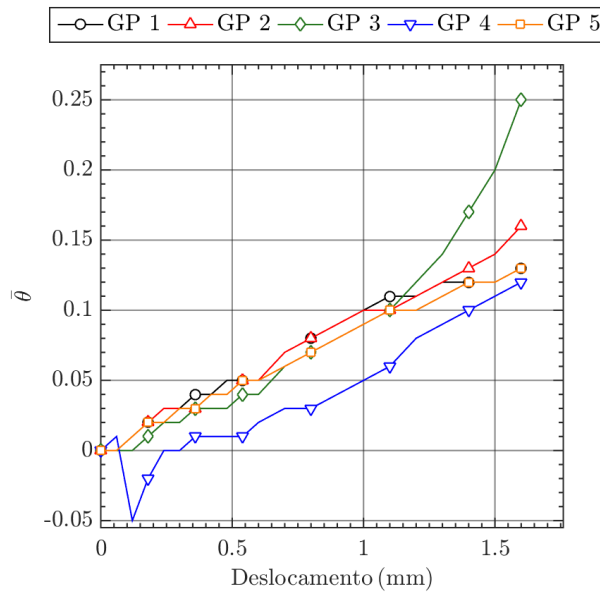
- *Porosidade e Deformação Total Equivalente.* A evolução das curvas da variável de dano é totalmente consistente com as respetivas curvas de triaxialidade já comentadas. Observa-se que a evolução da porosidade é em termos gerais praticamente nula em todos os pontos de Gauss, registando-se somente um ligeiro crescimento nos pontos GP 1 e GP 2 após $u \approx 1$ mm. A porosidade atingida nestes dois pontos para a totalidade do deslocamento prescrito é ainda assim inferior a 1.2% (ver Tabela 7.14). À semelhança do caso anterior, ocorre um crescimento acentuado da deformação total equivalente nos pontos localizados na região central (GP 1, GP 2 e GP 5). Note-se que os valores atingidos nestes pontos são já elevados quando comparados com os obtidos para os provetes de alta triaxialidade, o que fundamenta, mais uma vez, que o deslocamento prescrito foi suficiente para provocar ou conduzir o provete a um estado próximo da fratura.

Tabela 7.14: Porosidade e deformação total equivalente em cada ponto de Gauss analisado no provete borboleta em solicitação de corte puro para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 1.60$ mm).

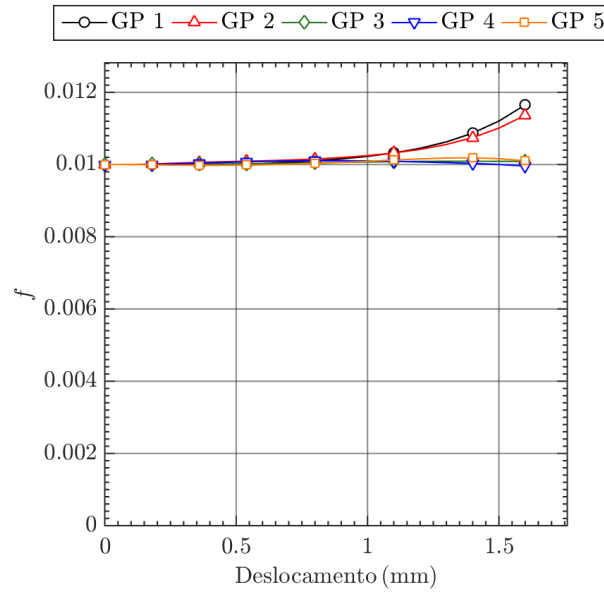
GP	$f(\%)$	$\bar{\epsilon}$
1	1.17	0.85
2	1.14	0.76
3	1.01	0.37
4	1.00	0.42
5	1.01	0.86



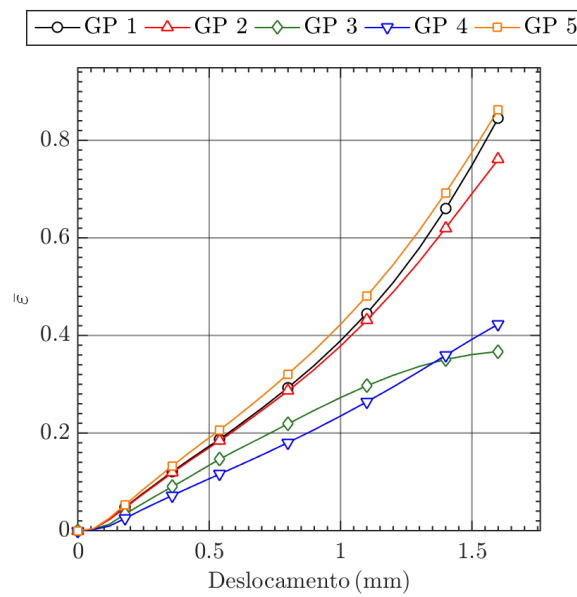
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 7.46: Análise da evolução das variáveis de interesse nos pontos de Gauss selecionados para o provete borboleta em solicitação de corte puro: (a) triaxialidade; (b) parâmetro do ângulo de Lode; (c) porosidade; (d) deformação total equivalente.

7.6 Conclusões

Neste capítulo procura-se essencialmente compreender e descrever o comportamento do modelo de Gurson através de um conjunto de análises macroscópicas em diferentes regimes de triaxialidade. Os resultados obtidos são a base comparativa para a posterior avaliação do modelo através de um modelo multi-escala baseado em homogeneização computacional.

No regime de alta triaxialidade obtém-se, para todos os provetes, a deformação global esperada do ponto de vista físico, sofrendo todos uma estricção acentuada nas respetivas secções críticas para a totalidade do deslocamento prescrito. As curvas força-deslocamento permitem também verificar que o deslocamento total imposto conduziu, tal como pretendido, os diferentes provetes a um nível de deformação próximo da fratura, sendo a perda de capacidade carga associada à estricção das secções críticas dos provetes e à evolução de dano evidente. As distribuições de porosidade e de deformação total equivalente são satisfatórias, ocorrendo uma evolução apreciável da variável de dano ao longo do histórico de deformação e sendo a localização da fratura prevista corretamente com base nas observações experimentais conhecidas.

No regime de baixa triaxialidade obtém-se igualmente as deformações esperadas do ponto de vista físico, sendo estas concentradas na região central do provete borboleta tal como previsto em Bai (2008). Apesar de em ambos os casos de solicitação não se observar qualquer perda da capacidade de carga nas curvas força-deslocamento, alguns estudos em Bai (2008) e os níveis de deformação atingidos sugerem que o provete é conduzido a um nível de deformação próximo da fratura como pretendido. Apesar da evolução da variável de dano ser bastante localizada e um pouco limitada face ao deslocamento total aplicado ao provete, no caso da solicitação combinada de corte e tração as distribuições de porosidade e de deformação total equivalente são consistentes, sendo o local de fratura corretamente previsto. Em contraste, no caso da solicitação de corte puro, a evolução da variável de dano foi praticamente nula e insuficiente para prever a localização da fratura do provete.

Conhecidos e interpretados os resultados obtidos pelo modelo de Gurson, estão estabelecidas as condições para proceder à avaliação da sua precisão através de um modelo multi-escala. Tal análise permitirá observar explicitamente a evolução do dano à microescala, o que certamente irá propiciar uma melhor interpretação e justificação dos resultados obtidos.

Capítulo 8

Análises Multi-escala

8.1 Introdução

Uma das vantagens de uma análise multi-escala baseada em homogeneização computacional reside na sua potencialidade para verificar, desenvolver e otimizar modelos constitutivos macroscópicos. Neste capítulo pretende-se precisamente explorar tal capacidade na avaliação do modelo de Gurson, procurando atingir o principal objetivo da presente dissertação.

Recordando os conceitos abordados nos Capítulos 4 e 5, numa análise multi-escala são consideradas duas escalas em simultâneo. O conceito base associado a este tipo de análise é bastante simples e resume em poucas palavras a sua potencialidade: à análise macroscópica do problema estrutural é incorporada uma análise simultânea à microescala, permitindo considerar explicitamente a evolução da microestrutura do material através de um procedimento de homogeneização computacional sobre um elemento de volume representativo (EVR). Como foi visto no Capítulo 6, os estudos micromecânicos sobre EVRs através do Método dos Elementos Finitos tornaram-se desde cedo numa ferramenta fundamental para a compreensão da fratura dúctil de materiais porosos. A modelação micromecânica da nucleação, crescimento e coalescência de vazios permite ainda hoje retirar conclusões importantes acerca da física dos diferentes micromecanismos envolvidos e consiste numa das principais metodologias para o desenvolvimento de modelos constitutivos, entre os quais se destaca o pioneiro modelo de Gurson. De modo geral, é considerado um EVR com uma determinada geometria e no qual as características da microestrutura, nomeadamente a presença de um ou mais vazios e/ou inclusões, são explicitamente modeladas em função dos micromecanismos que se pretende analisar. Apesar da importância deste tipo de análises no desenvolvimento de novos modelos constitutivos, estas são essencialmente ‘desligadas’ da macroescala. Uma das limitações existentes diz respeito ao carregamento do EVR, sendo esta explícita ou implicitamente materializada através da imposição de um gradiente de deformação que resulta na perturbação do equilíbrio microscópico. Neste sentido, uma das estratégias que tem vindo a ser adotada consiste em admitir um determinado conjunto de tensões macroscópicas não nulas e, mediante condições de fronteira apropriadas, impor um ‘carregamento proporcional’ do EVR. Por ‘carregamento proporcional’ entenda-se que é imposto um gradiente de deformação macroscópico de tal modo que a triaxialidade e o parâmetro de Lode são prescritos e mantidos constantes ao longo de todo o histórico de deformação. Dada a importância destes dois parâmetros no domínio da fratura dúctil, esta estratégia permite as-

sim explorar os diversos micromecanismos sob diferentes condições de solicitação, associadas porém a um estado de tensão macroscópico idealizado. Outra limitação desta abordagem resulta do desconhecimento da resposta efetiva do material à macroescala. Somente após o desenvolvimento de um modelo constitutivo contínuo, baseado num conjunto de hipóteses assumidas e variáveis internas relacionadas com a microestrutura, é então possível analisar a resposta do material à macroescala e verificar se as hipóteses assumidas são consistentes com as observações experimentais.

Para ultrapassar estas e outras limitações, será explorado um modelo multi-escala no domínio da fratura dúctil de materiais porosos. Tal capacidade computacional foi recentemente implementada no programa LINKS por Reis (2014) e Lopes (2016) e será aqui pela primeira vez explorada em simulações tridimensionais. Resultados obtidos através deste tipo de análise são ainda praticamente inexistentes na literatura, pelo que se espera ser aqui dado um dos primeiros contributos neste domínio.

Este capítulo encontra-se essencialmente dividido em duas partes. Na primeira parte é aplicado um modelo multi-escala na análise dos provetes considerados no capítulo anterior. Por comparação sistemática dos resultados obtidos no domínio macroscópico e através da capacidade de análise da microestrutura do material, pretende-se assim avaliar a precisão do modelo de Gurson nas diferentes condições de triaxialidade em regime de tração e corte. Na segunda parte realiza-se um breve análise da influência da porosidade secundária no comportamento do material ao longo do histórico de deformação, desenvolvendo para tal um EVR com duas populações de vazios. Visa-se aqui também avaliar o modelo de Gurson, já que neste é assumido que existe somente uma população de vazios na microestrutura do material. Em cada uma destas partes são inicialmente descritos todos os parâmetros de simulação relevantes e seguidamente apresentados e discutidos os resultados obtidos. Por último, são sintetizadas as principais conclusões e apresentadas algumas considerações pertinentes face aos objetivos estabelecidos para as análises realizadas neste capítulo.

8.2 Simulações numéricas

8.2.1 Seleção de provetes

No capítulo anterior foram considerados cinco provetes distintos e um total de seis simulações numéricas macroscópicas para estudar o comportamento do modelo de Gurson em diferentes regimes de triaxialidade. Inicialmente estaria previsto reproduzir novamente a totalidade das simulações numéricas recorrendo a uma análise multi-escala. No entanto, apesar dos esforços realizados no sentido de minimizar o esforço computacional associado a cada simulação, nomeadamente através da minimização do grau de refinação da malha e da incrementação (ver Subcapítulo 7.4.1), verifica-se que o tempo computacional associado a cada simulação supera uma semana tendo em conta os recursos alocáveis. Atendendo ao tempo disponível e ao objetivo que se pretende atingir, optou-se por selecionar as duas simulações que limitam o regime de alta triaxialidade e as duas simulações representativas do regime de baixa triaxialidade. Assim, na região de alta triaxialidade considerou-se o provete axissimétrico com entalhe de raio 4 mm e o provete não-entalhado, enquanto na região de baixa triaxialidade considerou-se o provete borboleta sob solicitação combinada de tração e corte e sob solicitação de corte puro. A geometria e a direção de solicitação destes provetes encontram-se representadas nas Figuras 7.2, 7.4, 7.6 e 7.7 respetivamente.

8.2.2 Parâmetros de simulação

Para as análises multi-escala será naturalmente considerado o mesmo material, a liga de alumínio 2024-T351, cujas propriedades se encontram apresentadas na Tabela 7.1. Em rigor, a lei de endurecimento do material deveria ser novamente calibrada através do modelo multi-escala, seguindo nomeadamente o procedimento de calibração descrito no Subcapítulo 7.3.2. No entanto, dado o tempo computacional associado a cada simulação multi-escala, realizar um procedimento de calibração iterativo seria proibitivo face ao tempo disponível. Por este motivo, optou-se por considerar nas análises multi-escala a mesma lei de endurecimento calibrada no capítulo anterior. Como será visto mais à frente, tal opção de ‘aproximação’ foi de certa forma bem sucedida, dado que a curva força-deslocamento obtida para o provete não-entalhado (utilizado no procedimento de calibração) é bastante próxima da curva-força-deslocamento experimental. Em relação aos modelos tridimensionais macroscópicos são utilizadas exatamente as mesmas malhas de elementos finitos já descritas na Secção 7.4.1 e, em particular, apresentadas nas Figuras 7.11, 7.13 e 7.15 para os provetes selecionados.

Para realizar uma análise multi-escala baseada em homogeneização computacional é necessário definir um ou mais EVRs da microestrutura do material, os quais são associados aos diferentes pontos de integração de Gauss na malha macroscópica e onde são resolvidos os problemas de equilíbrio à microescala. Para uma primeira avaliação multi-escala do modelo de Gurson é somente necessário considerar um EVR, procurando que este seja definido em consistência com as hipóteses assumidas pelo modelo (ver Secção 6.3.3) como se segue:

- *Modelação de dano.* É considerado um EVR cúbico de lado unitário contendo um vazio esférico concêntrico (ver Figura 8.1). Por definição, a fração volúmica de vazios (ou porosidade) é dada pela razão entre o volume do vazio e o volume total do EVR. Dado ter sido admitido que o material apresenta uma porosidade inicial de 1%, esta é agora imposta através das dimensões do vazio modelado. Em particular, dado que o EVR apresenta um volume unitário e que o vazio é esférico, o seu raio pode ser calculado como

$$R^v = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} f_0}, \quad (8.1)$$

em que f_0 é o valor da porosidade inicial. Para $f_0 = 1\%$ resulta $R^v \approx 0.1337$. Note-se que, apesar de ser tomado um vazio inicialmente esférico, ao contrário do que é assumido no modelo de Gurson, não existe qualquer restrição à distorção do vazio durante o histórico de deformação;

- *Modelo material constitutivo.* No modelo original de Gurson é assumido que o vazio se encontra embebido numa matriz isotrópica, incompressível e rígida-perfeitamente plástica de acordo com o modelo constitutivo de von Mises. Deste modo, é considerado que o material da matriz do EVR é governado pelo modelo constitutivo de von Mises, sendo, porém, tida em conta a lei de endurecimento do material calibrada no Subcapítulo 7.3 (este aspeto foi contemplado na Secção 6.3.3).

Considerando um EVR com geometria periódica, é demonstrado em de Souza Neto and Feijóo (2008) que para o caso de um campo de flutuações de deslocamentos periódico na fronteira é possível estabelecer a relação

$$J = \det \mathbf{F} = \frac{V_\mu}{V_{\mu_0}}, \quad (8.2)$$

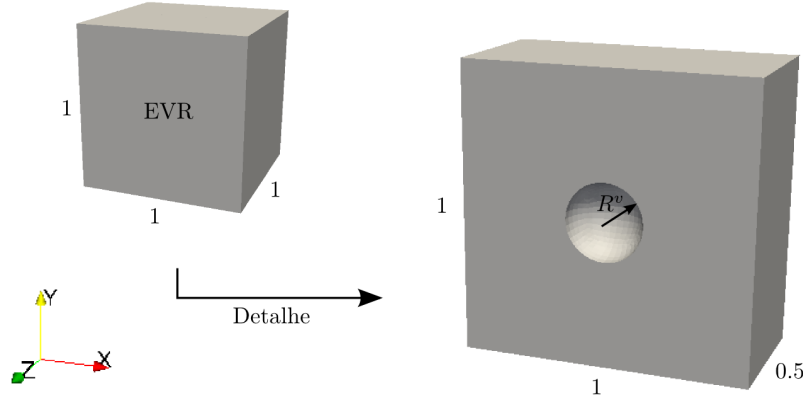


Figura 8.1: Geometria do EVR com um vazio esférico concêntrico.

o que do ponto de vista físico significa que o determinante do gradiente de deformação é igual à razão de variação de volume do EVR. Assim, quer para condição de fronteira linear quer para a condição de fronteira periódica pode escrever-se

$$V_{\mu}^v = V_{\mu 0} \det \mathbf{F} - V_{\mu}^s, \quad (8.3)$$

pelo que a porosidade pode ser definida ao nível do EVR como

$$f = \frac{V_{\mu}^v}{V_{\mu}} = 1 - \frac{V_{\mu}^s}{V_{\mu 0} \det \mathbf{F}}. \quad (8.4)$$

Deste modo, conhecido o gradiente de deformação em cada incremento de uma análise multi-escala ou micromecânica, a determinação computacional da porosidade requer somente a integração volumétrica sobre os elementos do EVR.

À semelhança dos modelos tridimensionais macroscópicos, o EVR foi discretizado numa malha estruturada de elementos hexaédricos de vinte nós com integração em oito pontos de Gauss e são consideradas condições de fronteira periódicas. Os custos computacionais associadas às análises multi-escala já foram abordadas na Secção 7.4.1, tendo sido discutidas a refinação da malha macroscópica e a incrementação do deslocamento prescrito. Numa análise multi-escala é ainda necessário estabelecer a refinação da malha à microescala, sendo este aspeto bastante pertinente por três motivos. Em primeiro lugar deve destacar-se o seu impacto ao nível do esforço computacional envolvido em cada simulação. Note-se que numa malha de n_{elem} elementos à macroescala, um elemento adicional na malha do EVR resulta em $64 \times n_{\text{elem}}$ pontos de integração de Gauss microscópicos adicionais que é necessário analisar em cada iteração macroscópica. Quer isto dizer que um aumento pouco significativo da refinação da malha ao nível do EVR resulta num aumento considerável da dimensão do problema multi-escala. Em segundo lugar é necessário ter em conta que a precisão dos resultados obtidos à macroescala é altamente dependente da precisão no cálculo das forças internas, sendo este essencialmente baseado no primeiro tensor de Piola-Kirchhoff homogeneizado. Por último, para interpretar devidamente os fenómenos que ocorrem ao nível da microescala, é desejável obter uma boa distribuição das diversas variáveis de campo

no EVR. Justifica-se assim a importância da definição adequada da malha de elementos finitos à microescala.

Para definir uma malha estruturada no EVR representado na Figura 8.1 foi considerada uma superfície auxiliar intermédia entre a superfície do vazio e as faces do EVR (Carvalho, 2015). A estratégia de discretização adotada permite uma boa geometria inicial dos elementos e uma maior refinação da malha na região de maior interesse em torno do vazio. Note-se ainda que, nesta região, a própria geometria da malha resulta em elementos de menor dimensão. Ignorando inicialmente a questão do tempo computacional, realizou-se um estudo de convergência de malha recorrendo a análises micromecânicas. Consideraram-se as três malhas representadas na Figura 8.2 com um total de 1354, 2080 e 5344 elementos respetivamente.

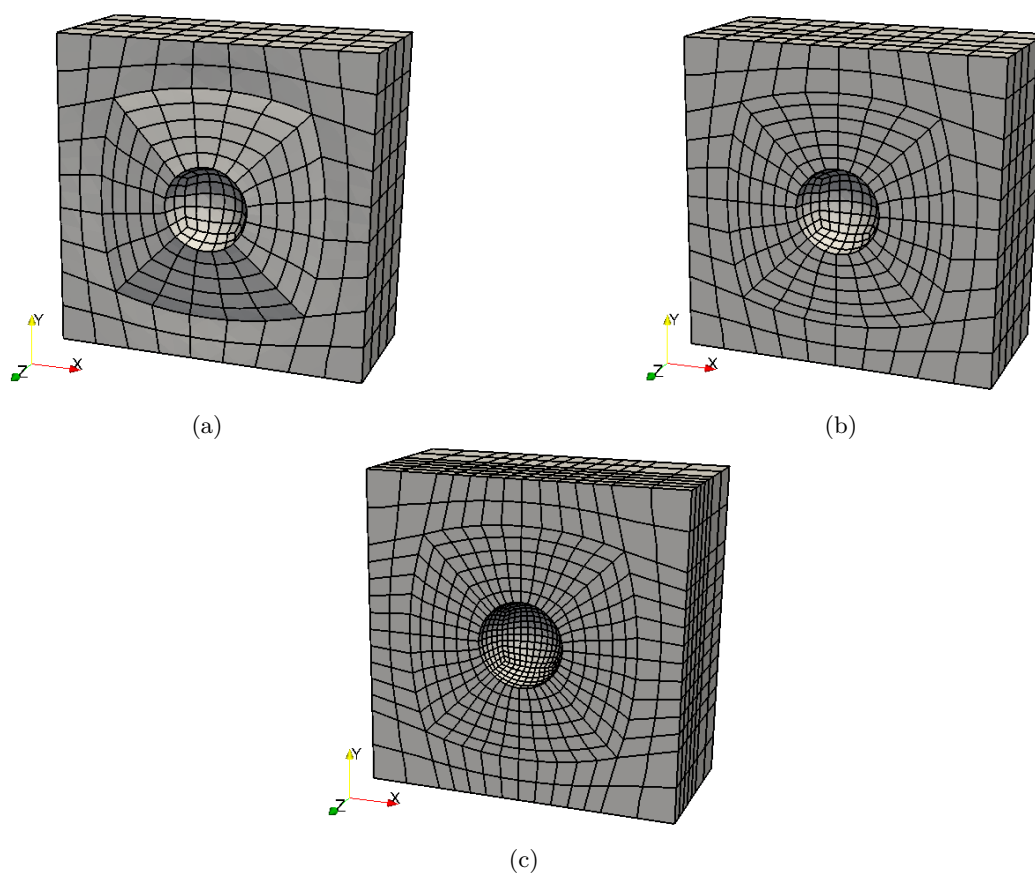


Figura 8.2: Discretização do EVR com um vazio esférico concêntrico numa malha estruturada de elementos hexaédricos de vinte nós: (a) 1354 elementos; (b) 2080 elementos; (c) 5344 elementos.

Utilizando como critério primordial a variação da resposta homogeneizada do campo de tensões (primeiro tensor de Piola-Kirchhoff homogeneizado), conclui-se que a malha de 1354 elementos já apresenta um grau de convergência satisfatório (diferenças inferiores a 1.00% face à malha mais refinada). Verifica-se também que os elementos apresentam, de

modo geral, uma boa geometria num estado de deformação avançado em solicitações de alta e baixa triaxialidade. Para averiguar o tempo computacional associado à utilização desta malha, simularam-se os primeiros incrementos de algumas das simulações previstas. Estimou-se que o tempo necessário para cada análise multi-escala completa seria de cerca de uma semana, o que mais tarde se revelou ser uma estimativa por defeito. A mesma estimativa foi realizada para a malha de 2080 elementos, concluindo-se que esta resultava em tempos computacionais excessivos face ao tempo disponível. É então considerada a malha de 1354 elementos.

Enquanto a atuação ao nível da refinação da malha permite efetivamente reduzir o esforço computacional associado a cada simulação numérica, o mesmo não acontece no que respeita à incrementação definida. Como já foi indicado, quando num dado incremento é ultrapassado um número máximo de iterações pré-definido ou ocorre divergência do processo iterativo, o programa LINKS ativa automaticamente um procedimento de sub-incrementação. Quer isto dizer que cada incremento definido inicialmente no ficheiro de entrada pode ser subdividido em incrementos de menor amplitude para tentar desta forma garantir a convergência da solução. Assim, apesar de ter sido definida a mesma incrementação já considerada nas simulações à macroescala (para a qual não ocorreu sub-incrementação), nada garante que não seja necessário um maior número de incrementos para obter a solução pretendida nas simulações multi-escala correspondentes. Deve por fim referir-se que, em cada um dos provetes selecionados, foi prescrito o mesmo valor total de deslocamento imposto na respetiva simulação à macroescala.

8.3 Resultados obtidos

8.3.1 Proвете entalhado (R4)

A deformação sofrida pelo provete é a esperada do ponto de vista físico, sendo consistente com a mesma observada através do modelo de Gurson (ver Figura 7.16). Como se pode observar na Figura 8.3, também as curvas força-deslocamento são praticamente coincidentes. É importante notar que a linha vertical a traço interrompido indica o último incremento considerado representativo ($u = 1.58$ mm), na medida em que após este instante alguns elementos da malha do EVR localizados em torno do vazio já se encontram excessivamente deformados.

Nas Figuras 8.4 e 8.5 encontram-se representadas, respetivamente, a distribuição da porosidade e da deformação total equivalente para o último incremento considerado representativo ($u = 1.58$ mm). Estas são também consistentes com as distribuições obtidas pelo modelo de Gurson, sendo o local de fratura corretamente previsto. Na Figura 8.4 são novamente indicados os cinco pontos de integração de Gauss selecionados para análise dos resultados.

Nas Figuras 8.6(a)-8.6(d) é apresentada a comparação das curvas de porosidade, deformação total equivalente, triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode obtidas pelo modelo multi-escala e pelo modelo de Gurson. Restringindo a análise até ao último incremento considerado representativo ($u = 1.58$ mm), observa-se que apenas existem diferenças apreciáveis ao nível da porosidade. Em todos os pontos de Gauss o modelo de multi-escala prevê valores desta variável superiores ao modelo de Gurson (ver Tabela 8.1). Este aspeto é mais evidente nos pontos de Gauss próximos do ponto central do provete (local previsto de fratura), tal como se pode constatar pelos erros relativos registados nos pontos GP 1, GP 2 e GP 4. Dado que a porosidade consiste na variável de dano do modelo de Gurson, a diferença encontrada no ponto crítico do provete (GP 1) pode acarretar uma diferença significativa no deslocamento previsto na fratura. Considerando, por exemplo, um valor crítico de poro-

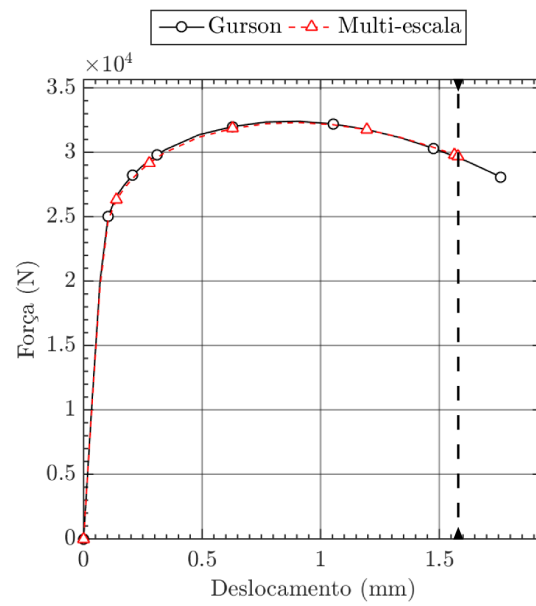


Figura 8.3: Comparação das curvas força-deslocamento obtidas pelo modelo multi-escala e pelo modelo de Gurson para o provete entalhado (R4).

sidade igual a 4%, o modelo multi-escala e o modelo de Gurson preveem deslocamentos na fratura de 1.49 mm e 1.62 mm respetivamente. Este aspeto torna-se ainda mais pertinente pelo facto de o modelo de Gurson não ser conservador do ponto de vista da segurança no dimensionamento estrutural.

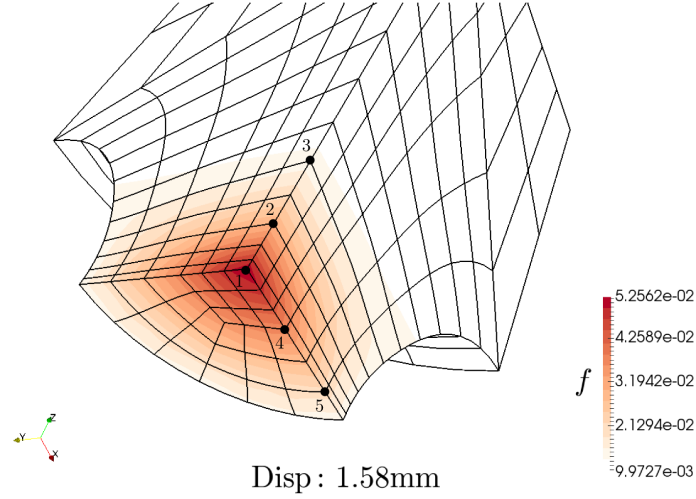


Figura 8.4: Distribuição da porosidade no provete entalhado (R4) obtida pelo modelo multi-escala para o último incremento considerado representativo ($u = 1.58$ mm) e representação das posições aproximadas dos pontos de Gauss para pós-processamento. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

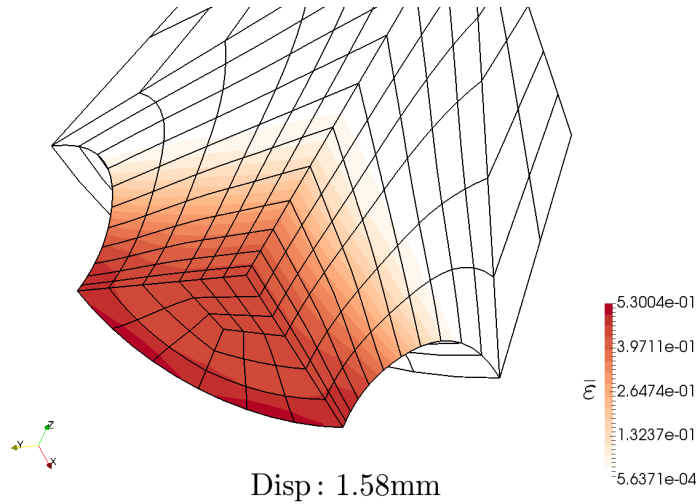
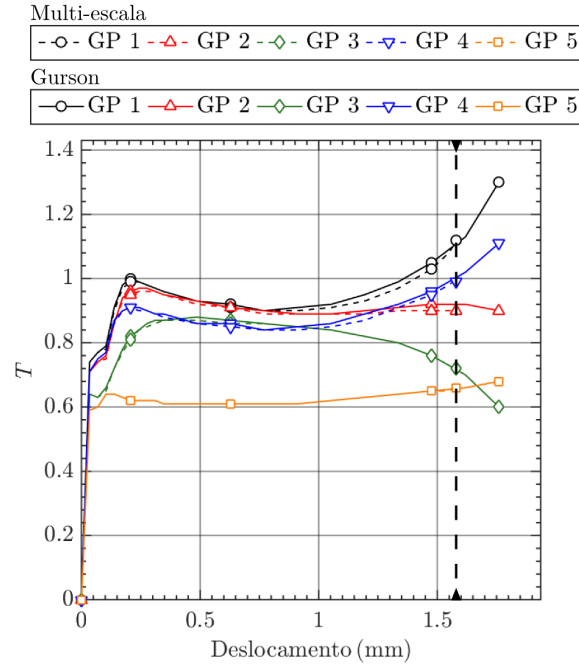


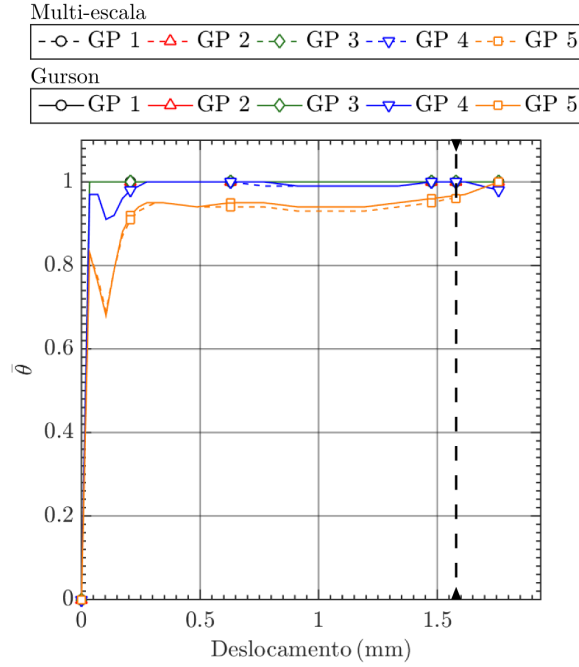
Figura 8.5: Distribuição da deformação total equivalente no provete entalhado (R4) obtida pelo modelo multi-escala para o último incremento considerado representativo ($u = 1.58$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

Tabela 8.1: Comparação do valor de porosidade atingido nos diferentes pontos de Gauss pelo modelo multi-escala e pelo modelo de Gurson para o último incremento considerado representativo ($u = 1.58$ mm) na análise do provete entalhado (R4). A diferença relativa é calculada em módulo e tendo como referência o resultado obtido pelo modelo multi-escala.

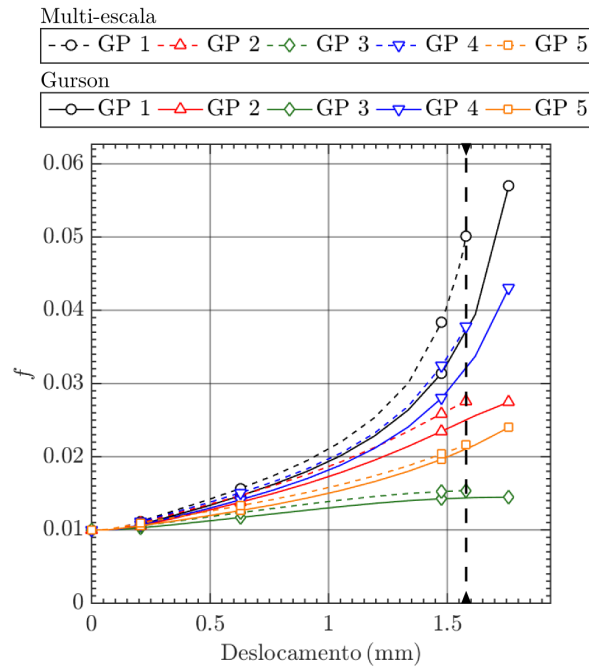
GP	$f(\%)$		$\epsilon(\%)$
	Gurson	Multi-escala	
GP 1	3.71	5.01	34.86
GP 2	2.50	2.76	10.25
GP 3	1.44	1.54	6.99
GP 4	3.21	3.78	17.80
GP 5	2.10	2.16	2.76



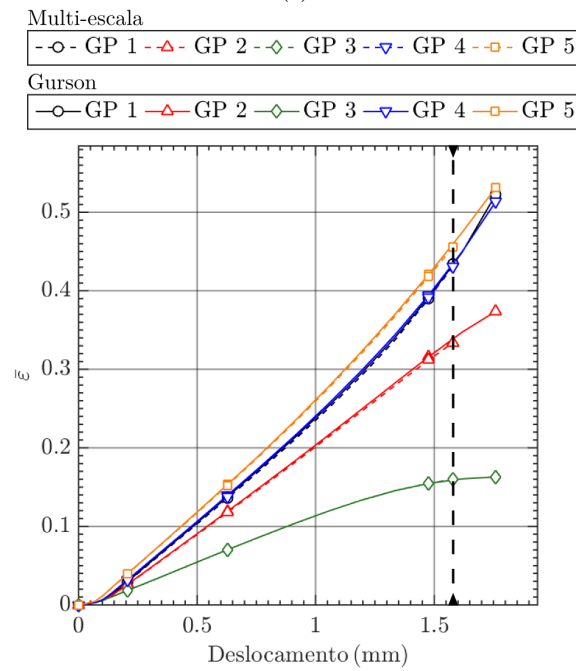
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 8.6: Comparação da evolução das variáveis de interesse entre o modelo multi-escala e o modelo de Gurson nos pontos de Gauss selecionados para o provete entalhado (R4): (a) triaxialidade; (b) parâmetro do ângulo de Lode; (c) porosidade; (d) deformação total equivalente.

O modelo multi-escala permite agora observar explicitamente o que ocorre ao nível da microestrutura do material, promovendo uma melhor compreensão e justificação dos resultados obtidos anteriormente. De particular importância nestes estudos é a evolução da geometria dos vazios, pertinente ao nível da evolução da porosidade, e a distribuição da deformação plástica equivalente.

Dada a sua importância na avaliação do comportamento do material, a atenção é concentrada inicialmente no ponto crítico do provete (GP 1) (ver Figura 8.7). Até $u = 0.242$ mm, o vazio cresceu de forma aproximadamente esférica, o que é consistente com a hipótese assumida pelo modelo de Gurson. Note-se que, apesar do aumento da porosidade neste instante ainda não ser muito pronunciado ($f = 1.15\%$), o provete já se encontra no domínio de cedência plástica. Após $u = 0.242$ mm, o vazio começa a tomar a geometria de um esferoide prolato, sendo o crescimento preferencial segundo a direção de sollicitação do provete tanto mais evidente quanto maior o deslocamento aplicado. Apesar deste aspeto, é importante notar que o vazio sofre um aumento monótono e apreciável da sua dimensão radial no plano xy . A comparação desta evolução de geometria face a um crescimento puramente esférico assumido pelo modelo de Gurson, pode justificar os maiores valores de porosidade encontrados no modelo multi-escala. Note-se que as curvas tendem a divergir com o aumento do deslocamento aplicado (ver Tabela 8.2), o que parece reforçar a importância do crescimento dominante do vazio segundo a direção de sollicitação do provete ao mesmo tempo que cresce radialmente no plano xy . Ao longo de todo o histórico de deformação, a deformação plástica equivalente localiza-se numa região próxima da superfície do vazio segundo o plano xy , transversal à direção de sollicitação do provete. Note-se ainda que, nos dois extremos do vazio segundo a direção z , a deformação plástica equivalente é bastante reduzida e praticamente desprezável quando comparada com os valores encontrados na região de localização.

Tabela 8.2: Comparação da evolução da porosidade no ponto crítico (GP 1) do provete entalhado (R4) entre o modelo multi-escala e o modelo de Gurson. A diferença relativa é calculada em módulo e tendo como referência o resultado obtido pelo modelo multi-escala.

$u(\text{mm})$	$f(\%)$		$\epsilon(\%)$
	Gurson	Multi-escala	
0.242	1.10	1.15	4.85
0.911	1.80	1.95	8.29
1.579	3.71	5.01	34.86

Nos restantes pontos de Gauss analisados, os vazios tomam igualmente a geometria de esferoides prolatos, crescendo todos preferencialmente segundo a direção de sollicitação do provete (ver Figura 8.8). A análise dos diferentes EVRs para o último incremento considerado representativo ($u = 1.58$ mm) permite observar uma correlação consistente entre o volume dos vazios e a distribuição macroscópica de dano (ver Figura 8.4). Apesar dos vazios tenderem para esferoides prolatos, é pertinente notar que a evolução da sua geometria (i.e. as razões de proporção do esferoide) é distinta. Comparando, por exemplo, os EVRs associados aos pontos GP 1 e GP 5, verifica-se que ambos sofrem essencialmente a mesma elongação segundo a direção de sollicitação do provete, mas o crescimento radial do primeiro é substancialmente maior no plano xy . Esta evolução distinta de geometria é consistente com o que seria expectável numa microestrutura real e põe em causa a lei de evolução de

dano do modelo de Gurson, segundo a qual a geometria dos vazios evolui de forma idêntica e depende apenas da componente volumétrica da taxa de deformação plástica.

Por último, a capacidade de uma análise multi-escala é colocada em evidência na Figura 8.9, onde se encontra indicada a curva força-deslocamento que caracteriza a resposta macroscópica do material. Nesta curva foram selecionados três pontos notáveis, nomeadamente no início da cedência plástica, no instante em que é atingida a força máxima e no último instante numericamente representativo. Tendo por base estes pontos, é apresentada uma análise simultânea da deformação global do provete à macroescala e da evolução da microestrutura do material ao longo do histórico de deformação.

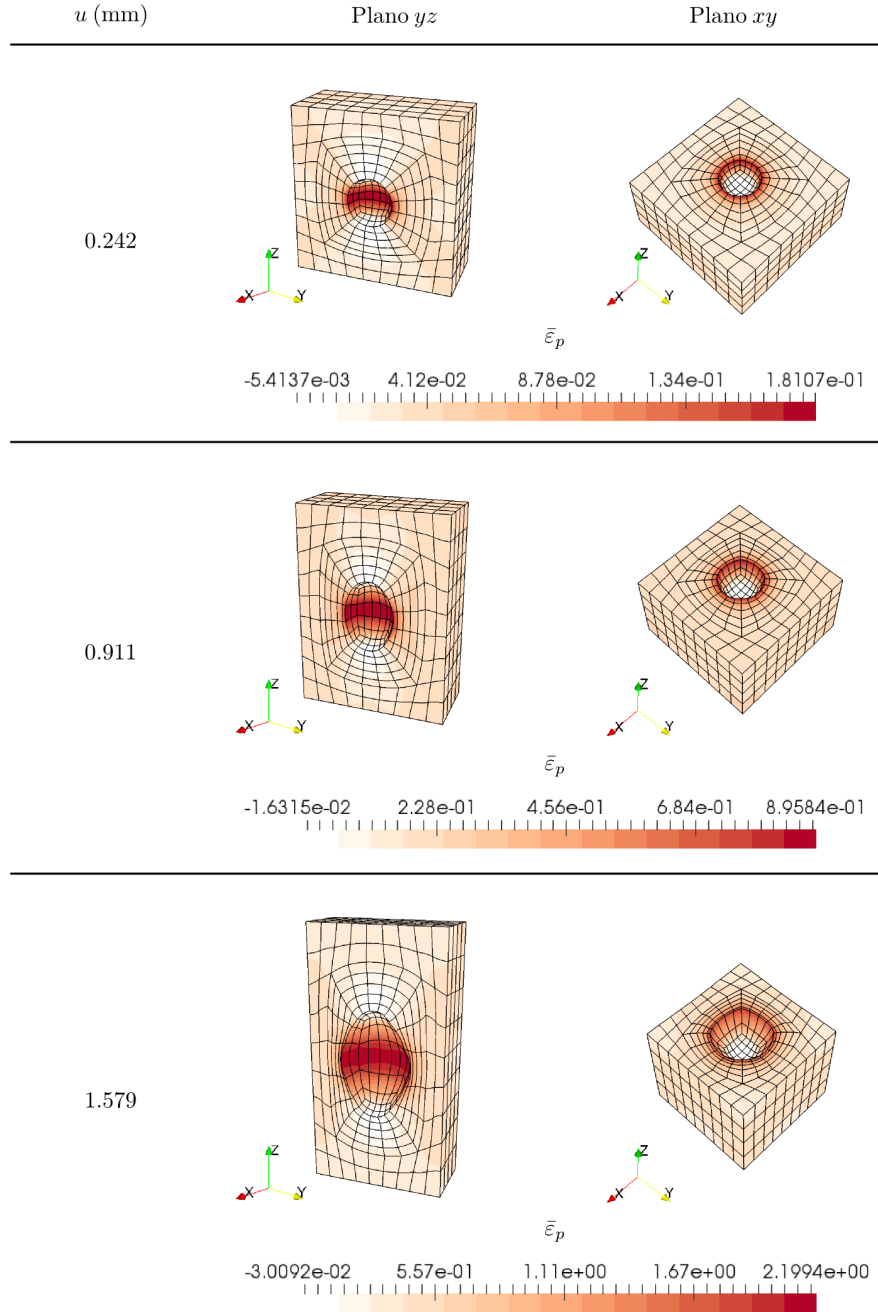


Figura 8.7: Evolução da geometria do vazio e da deformação plástica equivalente no EVR associado ao ponto crítico (GP 1) do provete entalhado (R4). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

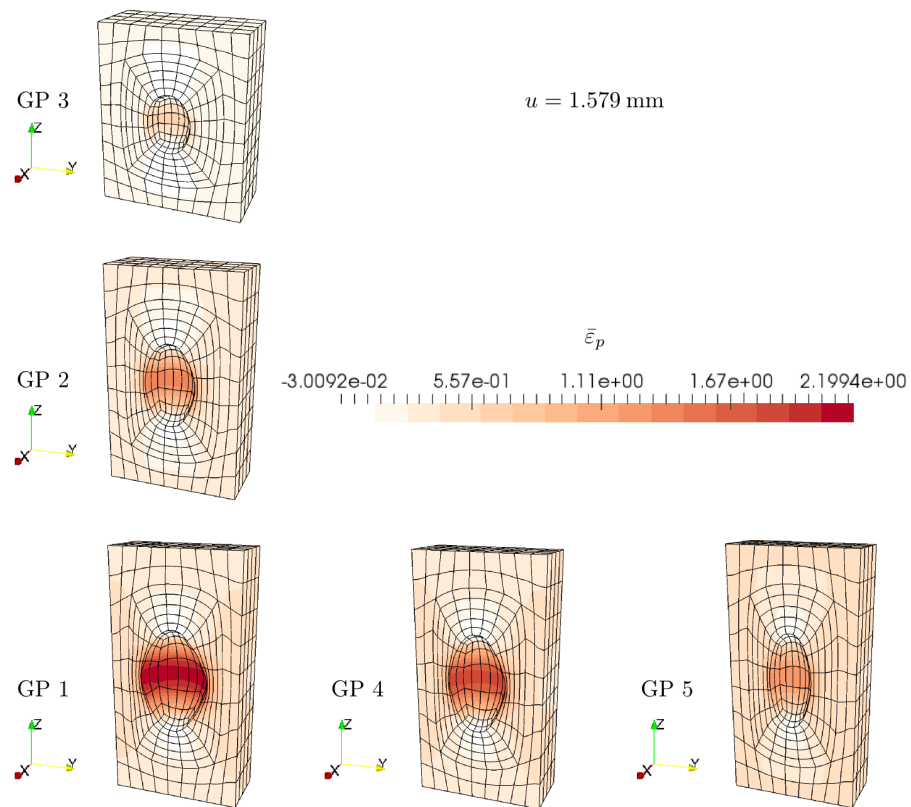


Figura 8.8: Geometria dos vazios e distribuição da deformação plástica equivalente nos EVRs associados aos diferentes pontos de Gauss para o último incremento considerado representativo ($u = 1.58 \text{ mm}$) no provete entalhado (R4). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

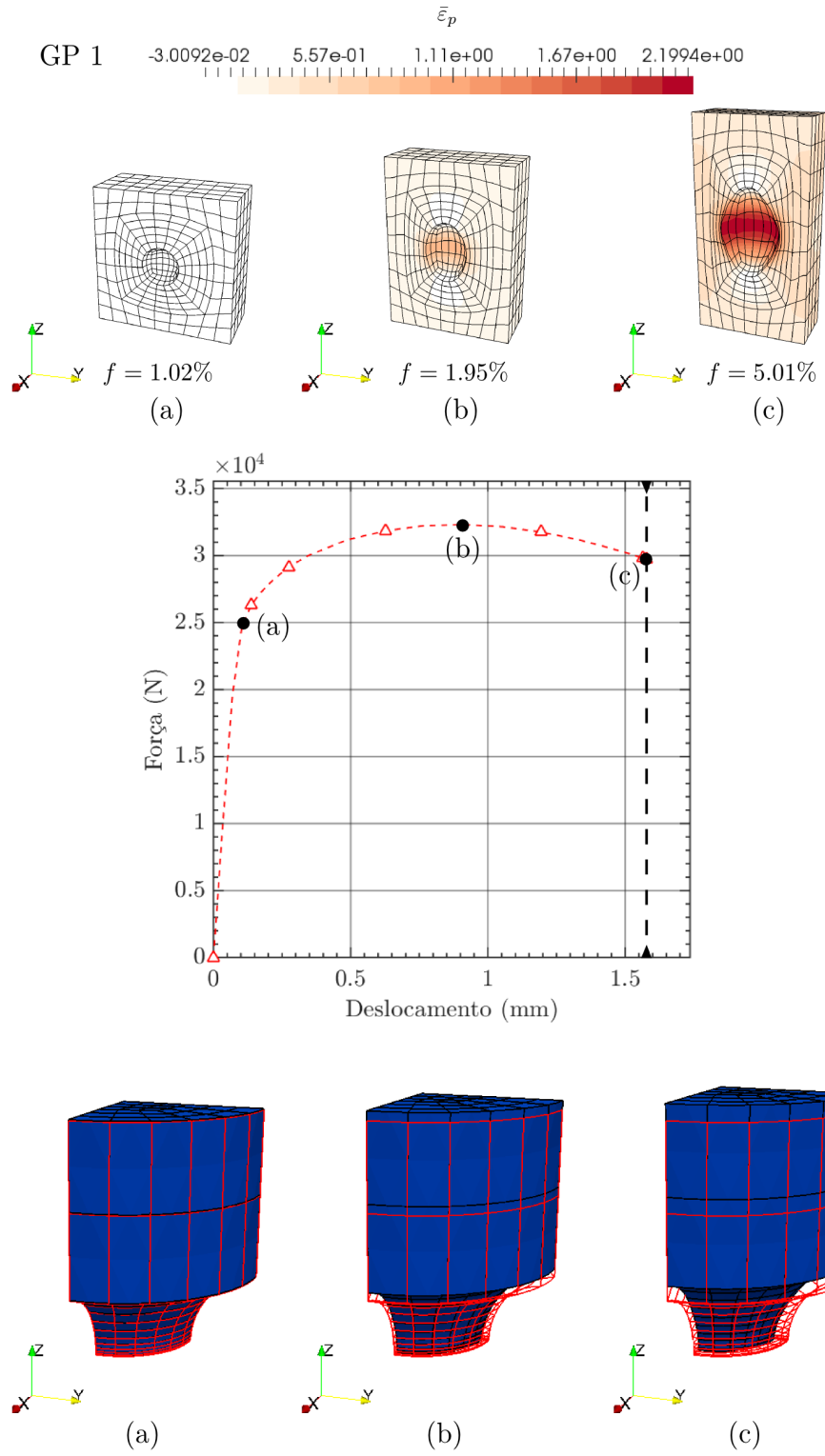


Figura 8.9: Análise multi-escala do provete entalhado (R4) ao longo do histórico de deformação associado a uma solicitação de tração uniaxial. Fator de escala de deformação $\times 1.0$ em ambas as escalas.

8.3.2 Provete não-entalhado

A deformação sofrida pelo provete é a esperada do ponto de vista físico e idêntica à observada previamente através do modelo de Gurson (ver Figura 7.26). Em relação à comparação das curvas força-deslocamento (ver Figura 8.10), verifica-se que estas são praticamente coincidentes até $u \approx 6$ mm. Para um valor superior do deslocamento aplicado, o modelo de Gurson prevê uma diminuição da capacidade de carga ligeiramente mais acentuada que o modelo multi-escala.

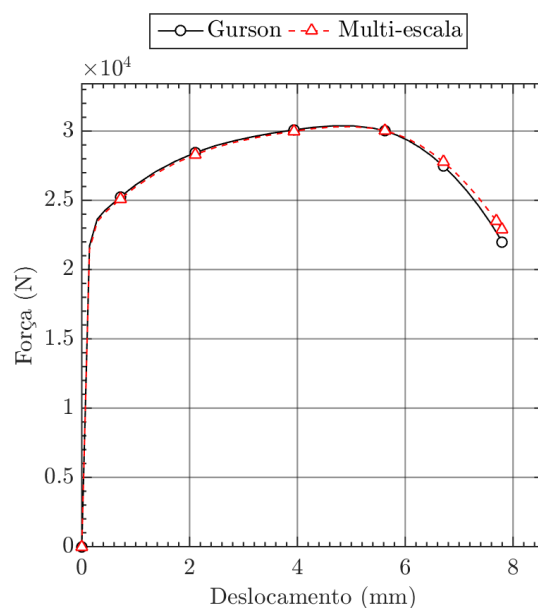


Figura 8.10: Comparação das curvas força-deslocamento obtidas pelo modelo multi-escala e pelo modelo de Gurson para o provete não-entalhado.

Nas Figuras 8.11 e 8.12 encontram-se representadas, respetivamente, a distribuição da porosidade e da deformação total equivalente para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 7.80$ mm). Estas são também consistentes com as distribuições obtidas pelo modelo de Gurson, sendo o local de fratura previsto corretamente. Na Figura 8.11 são novamente indicados os cinco pontos de integração de Gauss selecionados para análise dos resultados.

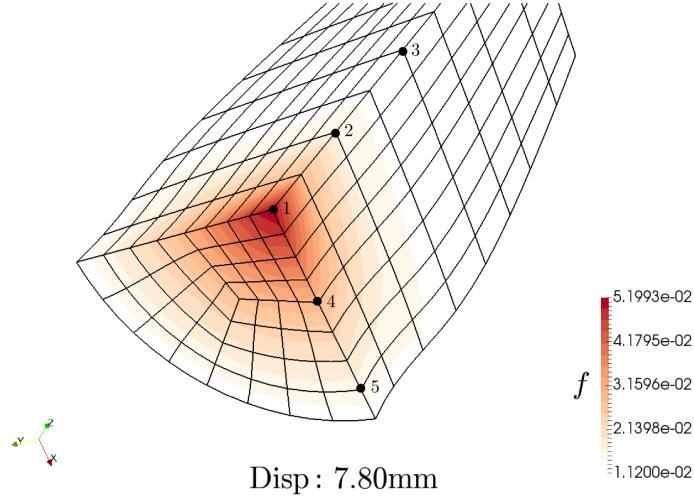


Figura 8.11: Distribuição da porosidade no provete não-entalhado obtida pelo modelo multi-escala para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 7.80$ mm) e representação das posições aproximadas dos pontos de Gauss para pós-processamento. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

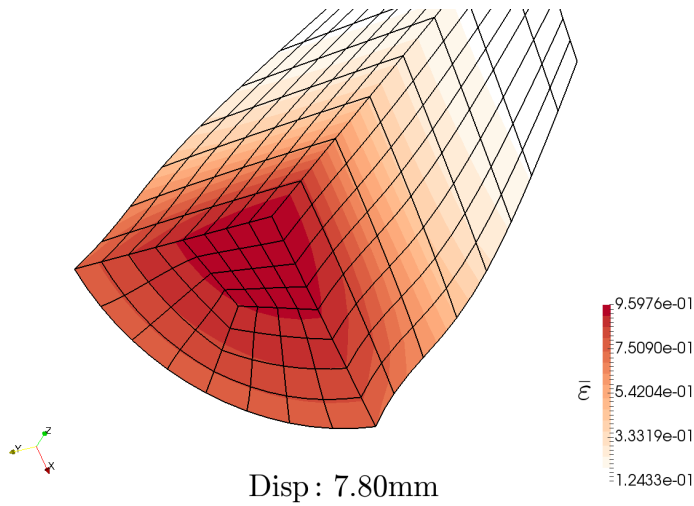
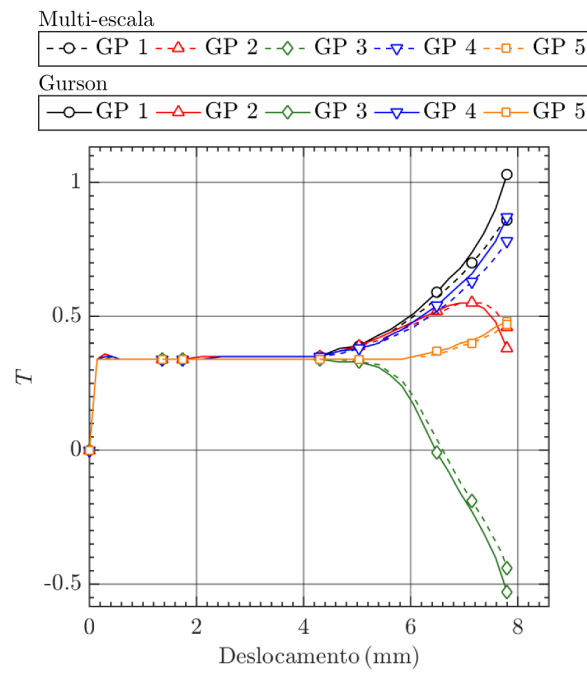


Figura 8.12: Distribuição da deformação total equivalente no provete não-entalhado obtida pelo modelo multi-escala para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 7.80$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

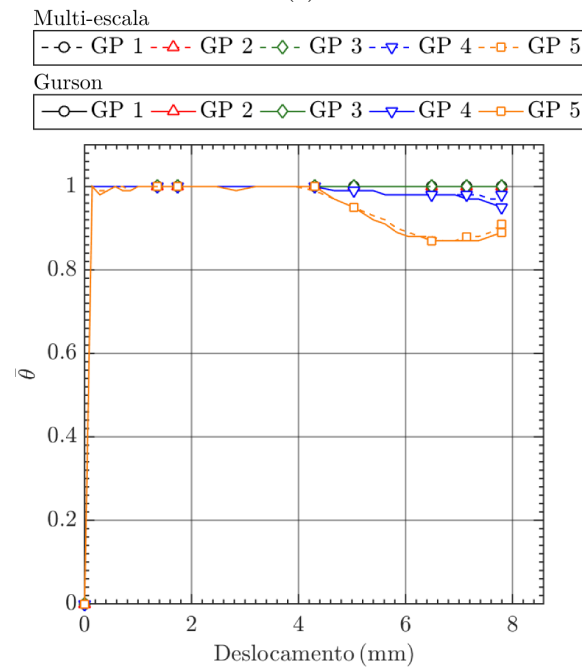
Nas Figuras 8.13(a)-8.13(d) é apresentada a comparação das curvas de porosidade, deformação total equivalente, triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode obtidas pelo modelo multi-escala e pelo modelo de Gurson. À exceção do ponto GP 3, no qual a porosidade tem um crescimento bastante limitado, o modelo multi-escala prevê valores de porosidade inferiores ao modelo de Gurson após $u \approx 5$ mm. Note-se que a diferença entre os dois modelos para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 7.80$ mm) é significativa nos pontos GP1, GP4 e GP5, localizados sobre a secção central do provete (ver Tabela 8.3). Apesar deste aspeto, a diferença encontrada no deslocamento previsto na fratura não é, neste caso, tão expressiva como no provete entalhado. Considerando novamente um valor crítico de porosidade igual a 4%, o modelo multi-escala e o modelo de Gurson preveem deslocamentos na fratura de 7.75 mm e 7.59 mm. Em relação à deformação total equivalente, triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode as diferenças encontradas são pouco significativas.

Tabela 8.3: Comparação do valor de porosidade atingido nos diferentes pontos de Gauss pelo modelo multi-escala e pelo modelo de Gurson para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 7.80$ mm) na análise do provete não-entalhado. A diferença relativa é calculada em módulo e tendo como referência o resultado obtido pelo modelo multi-escala.

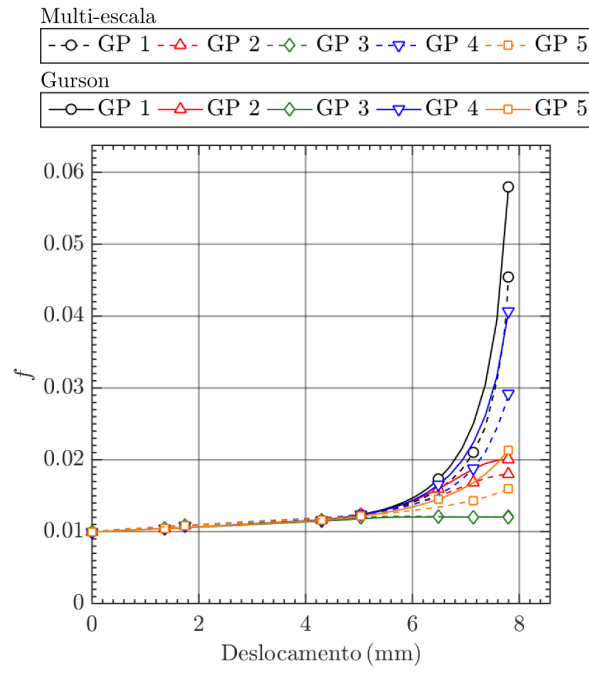
GP	$f(\%)$		$\epsilon(\%)$
	Gurson	Multi-escala	
GP 1	5.80	4.54	21.59
GP 2	2.01	1.80	10.44
GP 3	1.21	1.20	0.21
GP 4	4.07	2.92	28.06
GP 5	2.14	1.60	25.06



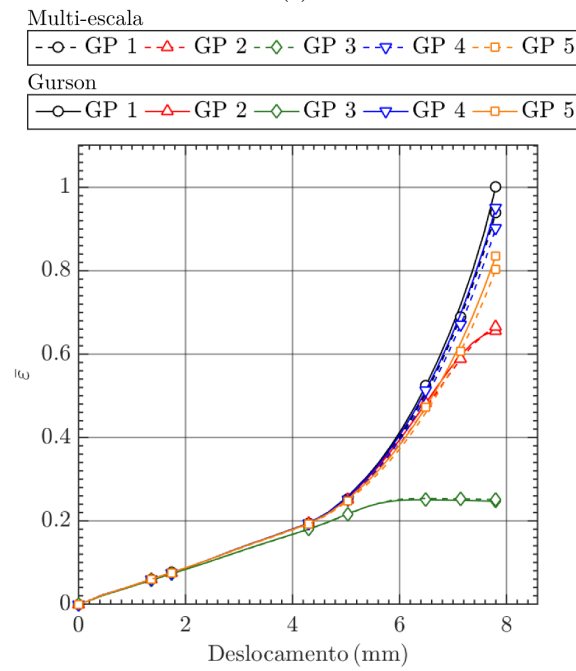
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 8.13: Comparação da evolução das variáveis de interesse entre o modelo multi-escala e o modelo de Gurson nos pontos de Gauss selecionados para o provete não-entalhado: (a) triaxialidade; (b) parâmetro do ângulo de Lode; (c) porosidade; (d) deformação total equivalente.

A observação dos resultados obtidos ao nível da microestrutura do material é de novo concentrada inicialmente no ponto crítico do provete (GP 1). Desde que principia a sua deformação, o vazio toma a geometria de um esferoide prolato (ver Figura 8.14). À semelhança do provete entalhado (R4), o crescimento preferencial do vazio segundo a direção de solitação do provete evidencia-se com o aumento do deslocamento aplicado (ver Figura 8.15). Porém, o modelo multi-escala prevê neste caso uma evolução da porosidade inferior ao modelo de Gurson. Para procurar justificar tal aparente inconsistência face ao provete anterior, é necessária uma análise crítica da evolução da geometria do vazio e do EVR no seu todo ao longo do histórico de deformação. Em primeiro lugar, note-se que a diferença entre o modelo multi-escala e o modelo de Gurson cresce com o aumento do deslocamento aplicado, o que parece mais uma vez reforçar a importância do crescimento dominante do vazio na direção de solitação do provete. Em segundo lugar, o EVR sofre, no seu todo, uma elongação mais acentuada que no caso do provete entalhado (R4), sendo esta acompanhada por uma diminuição considerável da sua secção transversal (plano xy). Por último, deve notar-se que o aumento da dimensão radial do vazio no plano xy foi pouco significativo ao longo do histórico de deformação. De facto, verifica-se com facilidade que o vazio toma uma geometria bastante mais alongada do que no caso do provete entalhado. Face aos resultados obtidos é plausível assumir que, apesar do crescimento significativo do vazio segundo a direção de solitação do provete, o fraco crescimento radial no plano xy resulta num aumento de porosidade inferior ao que ocorreria no caso de um crescimento puramente esférico. Procura-se assim justificar os valores inferiores de porosidade previstos na análise multi-escala para este provete (ver Tabela 8.4). Ao longo do histórico de deformação, verifica-se de novo que a deformação plástica equivalente localiza-se numa região próxima da superfície do vazio segundo o plano xy e que apresenta um valor bastante reduzido nas extremidades do vazio segundo a direção de solitação do provete.

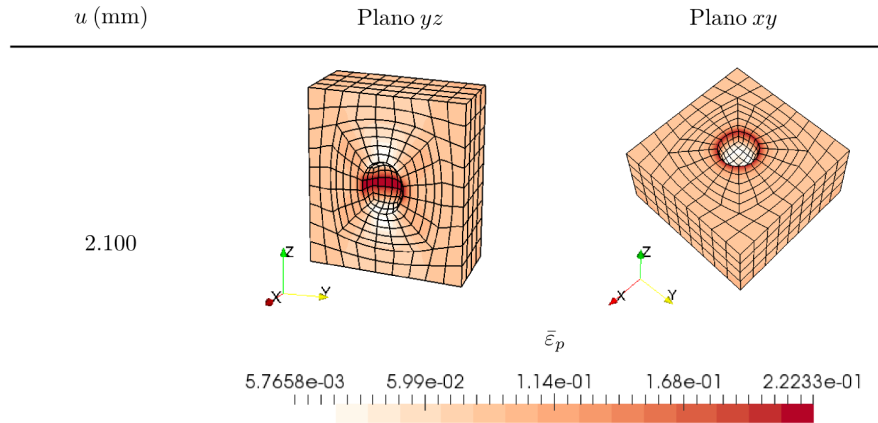


Figura 8.14: Deformação do vazio associado no EVR associado ao ponto crítico (GP 1) do provete não-entalhado para $u = 2.100$ mm. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

Nos restantes pontos de Gauss verifica-se igualmente que os vazios tomam a geometria de esferoides prolatos, crescendo preferencialmente segundo a direção de solitação do provete (ver Figura 8.16). A análise dos EVRs para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 7.80$ mm) permite observar a consistência entre o volume dos vazios e a distribuição

Tabela 8.4: Comparação da evolução da porosidade no ponto crítico (GP 1) do provete não-entalhado entre o modelo multi-escala e o modelo de Gurson. A diferença relativa é calculada em módulo e tendo como referência o resultado obtido pelo modelo multi-escala.

$u(\text{mm})$	$f(\%)$		$\epsilon(\%)$
	Gurson	Multi-escala	
6.055	1.49	1.42	4.46
6.709	1.91	1.71	10.63
7.800	5.80	4.54	21.59

macroscópica de dano (ver Figura 8.11). A evolução da geometria dos vazios (i.e. as razões de proporção do esferoide) é neste caso essencialmente semelhante.

Por último, a capacidade de uma análise multi-escala é mais uma vez colocada em evidência na Figura 8.17, onde se encontra indicada a curva força-deslocamento que caracteriza a resposta macroscópica do material. Nesta curva foram selecionados quatro pontos notáveis, nomeadamente no início da cedência plástica, no instante em que é atingida a força máxima e na região próxima da fratura do provete. Tendo por base estes pontos, é apresentada uma análise simultânea da deformação global do provete à macroescala e da evolução da microestrutura do material ao longo do histórico de deformação.

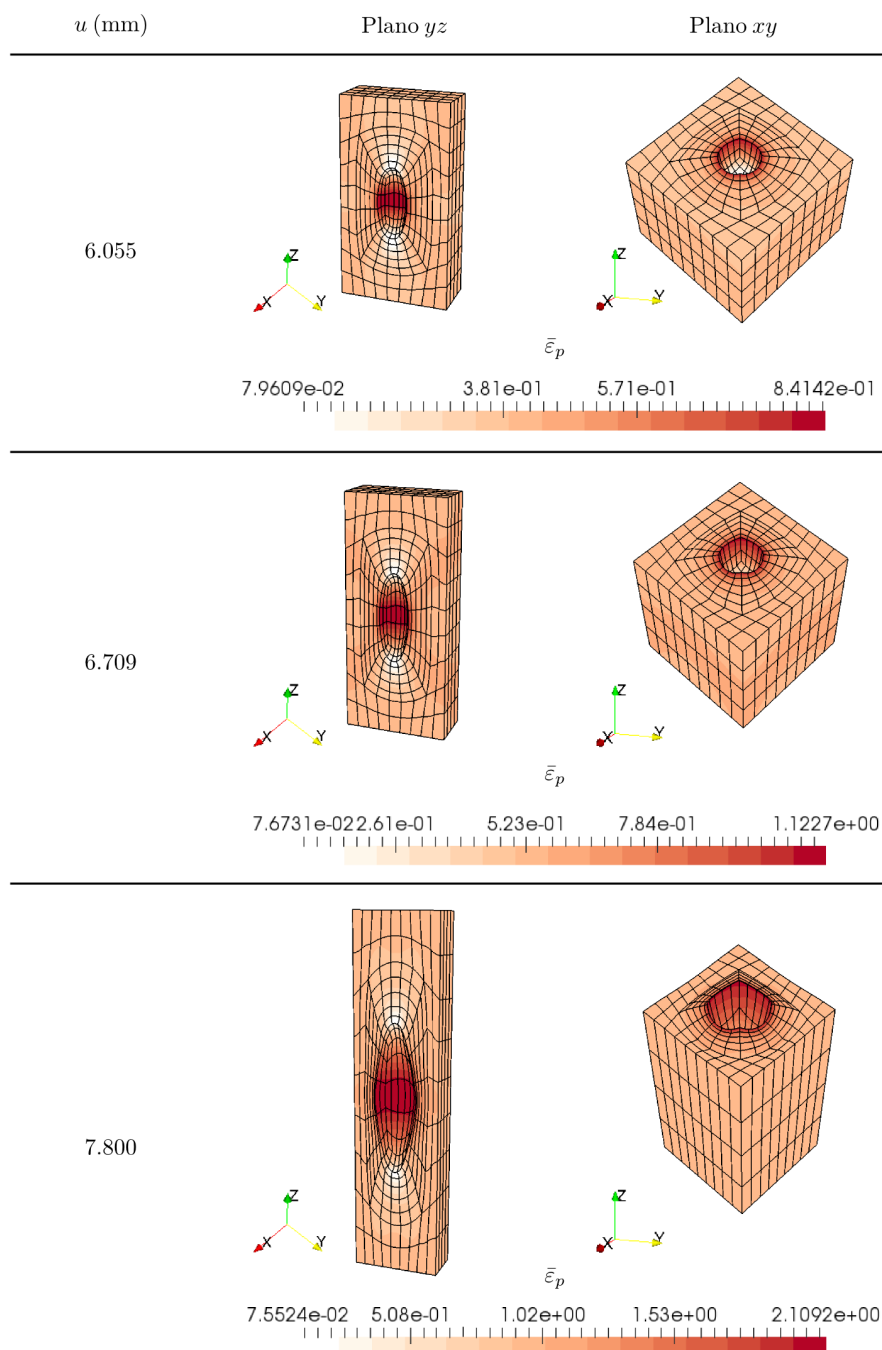


Figura 8.15: Evolução da geometria do vazio e da deformação plástica equivalente no EVR associado ao ponto crítico (GP 1) do provete não-entalhado. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

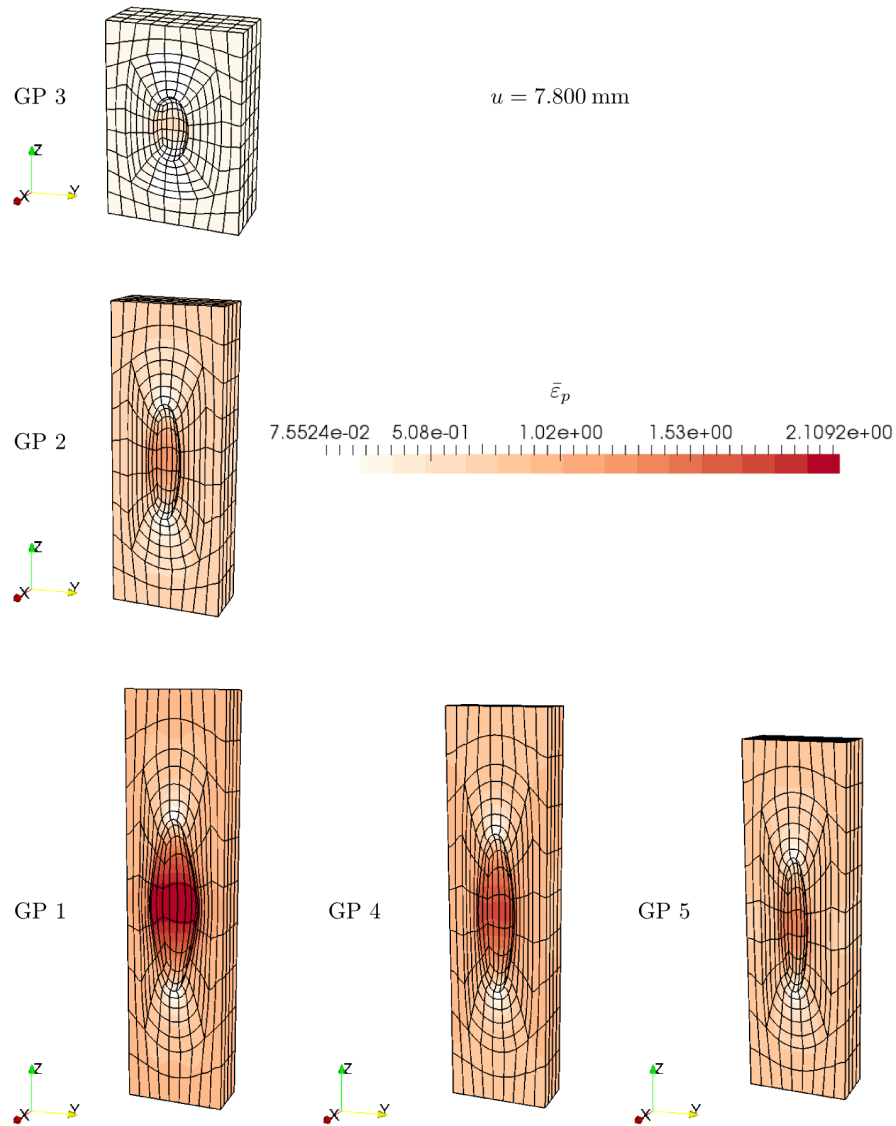


Figura 8.16: Geometria dos vazios e distribuição da deformação plástica equivalente nos EVRs associados aos diferentes pontos de Gauss para a totalidade do deslocamento prescrito ($u = 7.80 \text{ mm}$) no provete não-entalhado. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

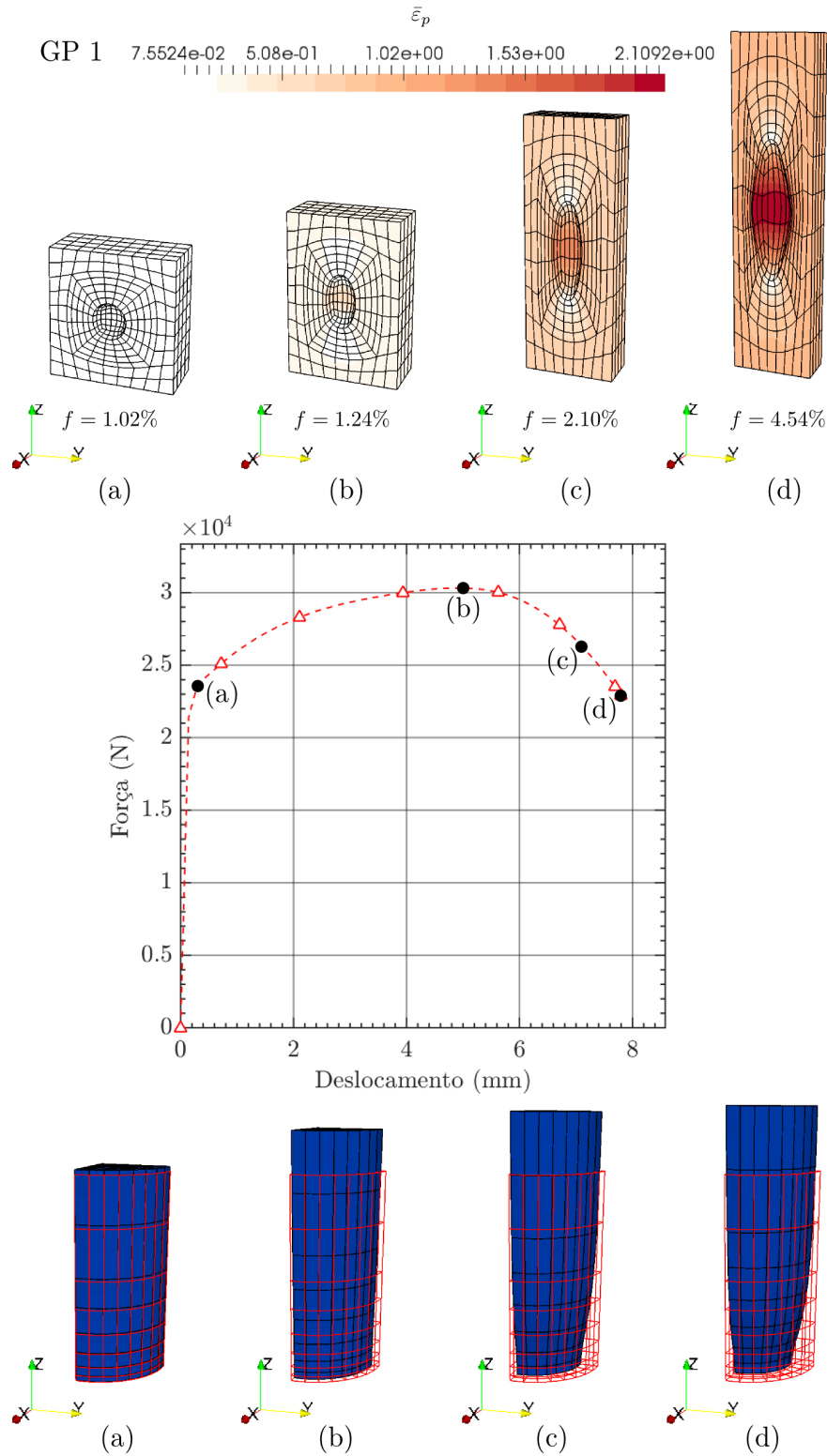


Figura 8.17: Análise multi-escala do provete não-entalhado ao longo do histórico de deformação associado a uma solicitação de tração uniaxial. Fator de escala de deformação $\times 1.0$ em ambas as escalas.

8.3.3 Provete borboleta ($\alpha = 10^\circ$)

A deformação sofrida pelo provete é a esperada do ponto de vista físico, sendo consistente com a mesma observada através do modelo de Gurson (ver Figura 7.37). Atendendo à Figura 8.18, verifica-se que as curvas força-deslocamento são praticamente coincidentes até $u \approx 1.10\text{mm}$. Após este instante, as curvas divergem pelo facto da curva obtida pelo modelo multi-escala não sofrer qualquer amaciamento, aspeto que sugere uma maior evolução de dano prevista pelo modelo de Gurson. A linha vertical a traço interrompido indica o último incremento considerado representativo ($u = 1.45\text{ mm}$), na medida em que alguns elementos ao nível do EVR já se encontram excessivamente deformados e alguns vazios se encontram próximos do colapso. Note-se que o programa LINKS ainda não possui a capacidade de modelar contacto, pelo que após este ocorrer os resultados não seriam válidos.

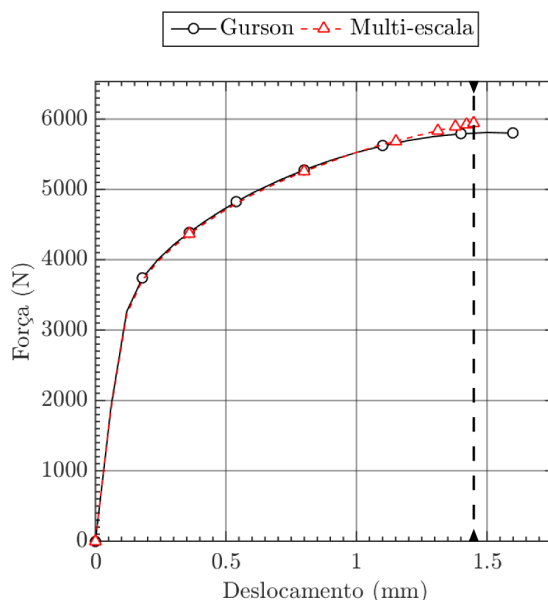


Figura 8.18: Comparação das curvas força-deslocamento obtidas pelo modelo multi-escala e pelo modelo de Gurson para o provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte.

Nas Figuras 8.19 e 8.20 encontram-se representadas, respetivamente, a distribuição da porosidade e da deformação total equivalente para o último incremento considerado representativo ($u = 1.45\text{mm}$). Comparando as Figuras 8.19 e 7.39, observa-se que as distribuições macroscópicas de porosidade são semelhantes, sendo o local de fratura previsto corretamente no centro do provete. Nesta figura são ainda novamente indicados os cinco pontos de integração de Gauss selecionados para a análise de resultados. Em relação à distribuição da deformação total equivalente, não existem diferenças significativas. Comparando as Figuras 8.20 e 7.40, verifica-se que esta se localiza igualmente ao longo da espessura da região central do provete (plano xz), tendendo a uma maior localização na superfície.

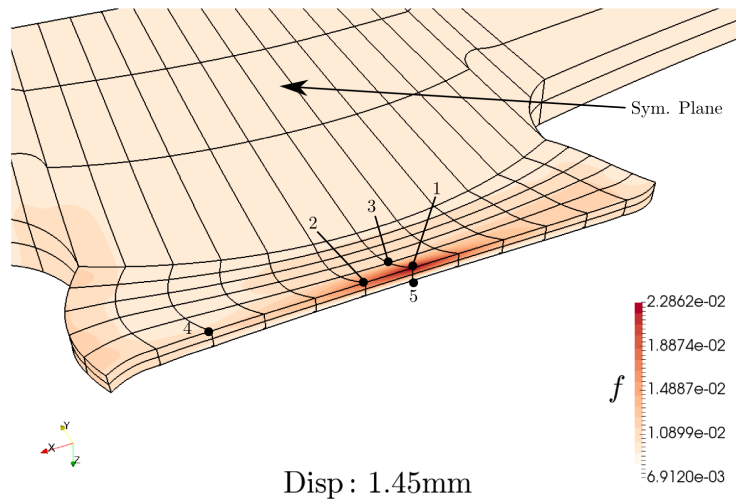


Figura 8.19: Distribuição da porosidade no provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte obtida pelo modelo multi-escala para o último incremento considerado representativo ($u = 1.45$ mm) e representação das posições aproximadas dos pontos de Gauss para pós-processamento. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

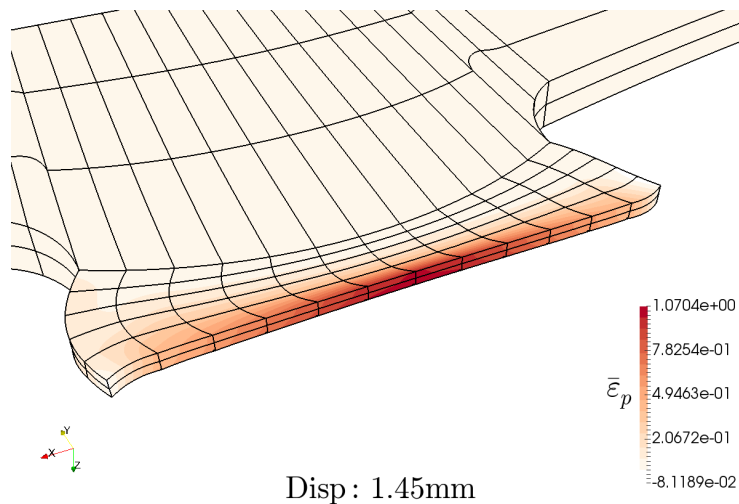
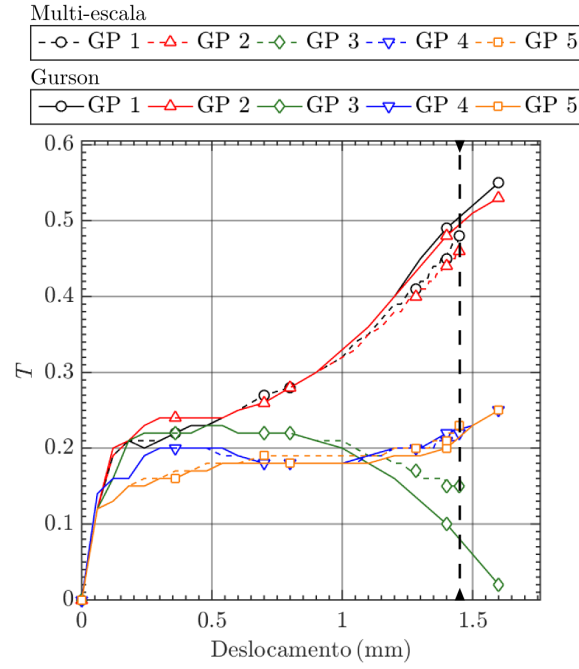


Figura 8.20: Distribuição da deformação total equivalente no provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte obtida pelo modelo multi-escala para o último incremento considerado representativo ($u = 1.45$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

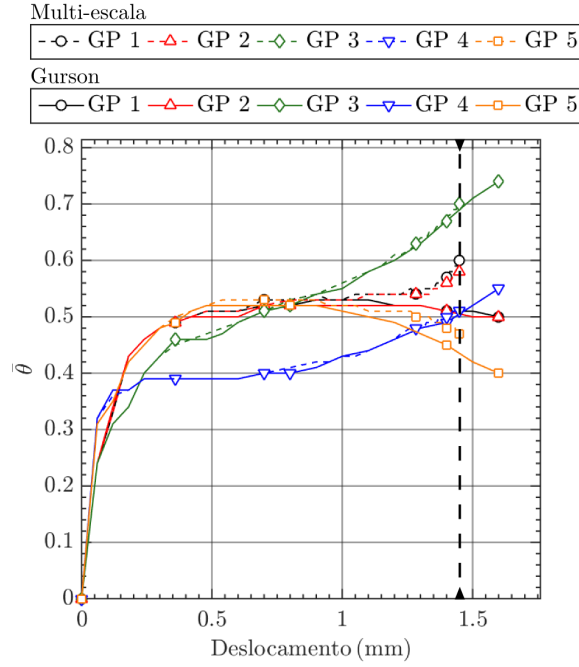
Nas Figuras 8.21(a)-8.21(d) é apresentada a comparação das curvas de porosidade, deformação total equivalente, triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode obtidas pelo modelo multi-escala e pelo modelo de Gurson. Em todos os pontos de Gauss analisados, o modelo multi-escala prevê valores de porosidade inferiores ao modelo de Gurson após $u \approx 0.75$ mm. Em particular, nos pontos de Gauss localizados a meia espessura do provete e próximos do local de fratura experimental (GP 1 e GP 2), a diferença é apreciável e pode conduzir a um erro significativo do deslocamento previsto na fratura. Adicionalmente, nos pontos GP 4 e GP 5, o modelo multi-escala prevê uma diminuição de porosidade mesmo para valores positivos de triaxialidade ao longo de todo o histórico de deformação. Para além das divergências numéricas daí resultantes, tal evolução é totalmente contraditória com a lei de evolução de dano do modelo de Gurson. As diferenças encontradas em relação à deformação total equivalente, triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode são pouco expressivas.

Tabela 8.5: Comparação do valor de porosidade atingido nos diferentes pontos de Gauss pelo modelo multi-escala e pelo modelo de Gurson para o último incremento considerado representativo ($u = 1.45$ mm) na análise do provete borboleta em solitação combinada de tração e corte. A diferença relativa é calculada em módulo e tendo como referência o resultado obtido pelo modelo multi-escala.

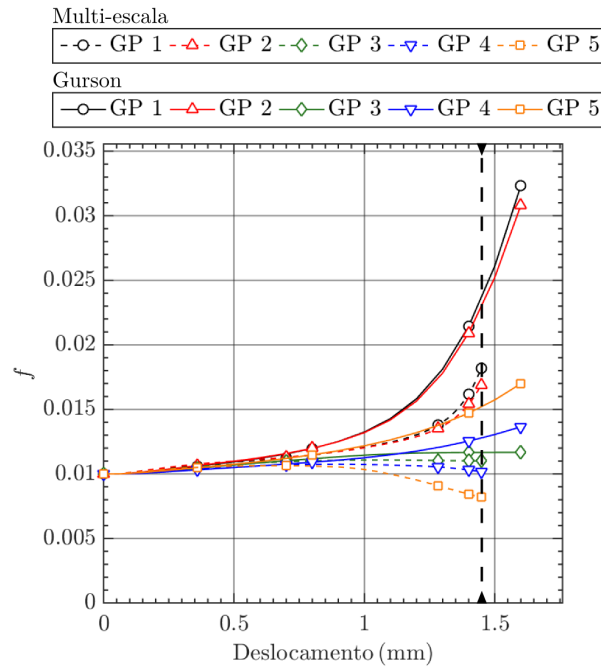
GP	$f(\%)$		$\epsilon(\%)$
	Gurson	Multi-escala	
GP 1	2.37	1.82	23.04
GP 2	2.30	1.69	26.36
GP 3	1.17	1.10	5.87
GP 4	1.28	1.02	20.44
GP 5	1.52	0.82	46.07



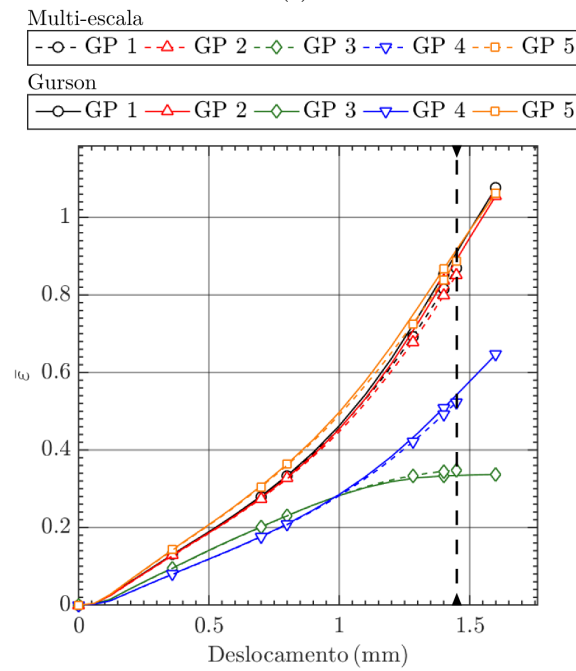
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 8.21: Comparação da evolução das variáveis de interesse entre o modelo multi-escala e o modelo de Gurson nos pontos de Gauss selecionados para o provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte: (a) triaxialidade; (b) parâmetro do ângulo de Lode; (c) porosidade; (d) deformação total equivalente.

A capacidade de observação ao nível da microestrutura do material permite averiguar as diferenças encontradas nas evoluções de porosidade. Atendendo em primeiro lugar à deformação dos diferentes EVRs, apresentada na Figura 8.22, verifica-se que todos sofrem uma distorção de corte acentuada e concordante com a solicitação aplicada ao provete. Os respectivos vazios sofrem igualmente uma distorção de corte, sofrendo uma rotação que acompanha a deformação do EVR. Tal evolução geométrica não é de forma alguma consistente com a hipótese de crescimento esférico assumida pelo modelo de Gurson, justificando os menores valores de porosidade encontrados pelo modelo multi-escala em todos os pontos analisados. Para além deste aspeto, nas Figuras 8.23 e 8.24 encontram-se representadas as evoluções da geometria dos vazios associados aos EVRs dos pontos GP 1 e GP 5. Neste último, é notório que o vazio tende a colapsar, tomando uma geometria elipsoidal que é pouco afetada pela distorção do EVR e consistente com a diminuição de porosidade. Em contraste, no ponto GP 1 a tendência para o fecho do vazio é menos pronunciada e a sua evolução geométrica é condicionada pela distorção do EVR, a qual conduz a uma elongação do vazio e consequente aumento da porosidade. A diferença observada é ainda consistente com os valores de triaxialidade encontrados nestes dois pontos e coloca em evidência a importância da geometria dos vazios na evolução das curvas de porosidade. A deformação plástica equivalente localiza-se na vizinhança da superfície do vazio na direção perpendicular ao plano da solicitação de corte (direção z) e apresenta um valores bastante reduzido ao longo de todo o histórico de deformação nas extremidades do vazio inicialmente localizadas segundo a direção y . Nos pontos GP 1 e GP 2 é ainda bem visível a formação de uma banda de corte no plano xz , onde a deformação plástica equivalente tende a concentrar-se.

Por último, a capacidade de uma análise multi-escala é colocada em evidência na Figura 8.25, onde se encontra indicada a curva força-deslocamento que caracteriza a resposta macroscópica do material. Nesta curva foram selecionados dois pontos notáveis, nomeadamente no início da cedência plástica e no último instante numericamente representativo, e um ponto intermédio. Tendo por base estes pontos, é apresentada uma análise simultânea da deformação global do provete à macroescala e da evolução da microestrutura do material ao longo do histórico de deformação.

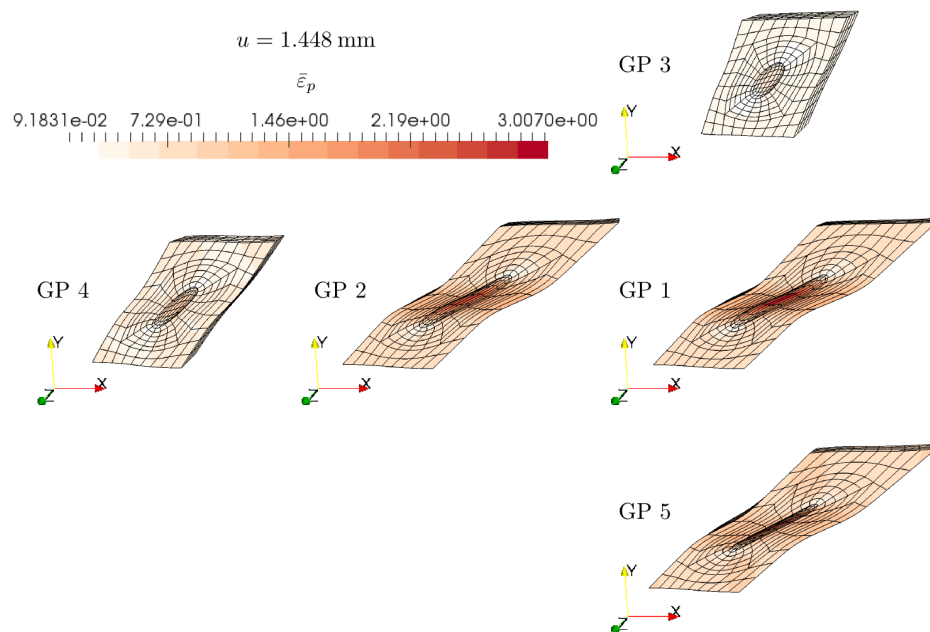


Figura 8.22: Geometria dos vazios e distribuição da deformação plástica equivalente nos EVRs associados aos diferentes pontos de Gauss para o último incremento considerado representativo ($u = 1.45 \text{ mm}$) no provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

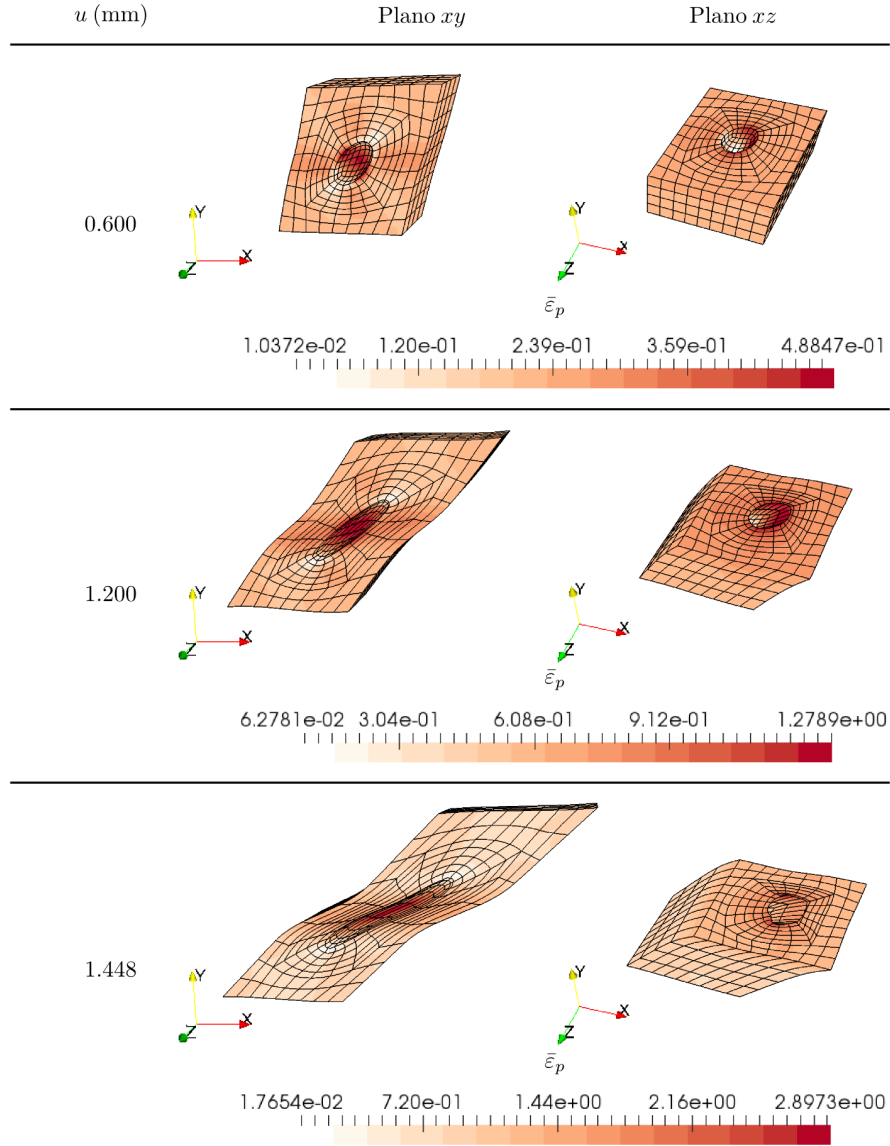


Figura 8.23: Evolução da geometria do vazio e da deformação plástica equivalente no EVR associado ao ponto de Gauss GP 1 do provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

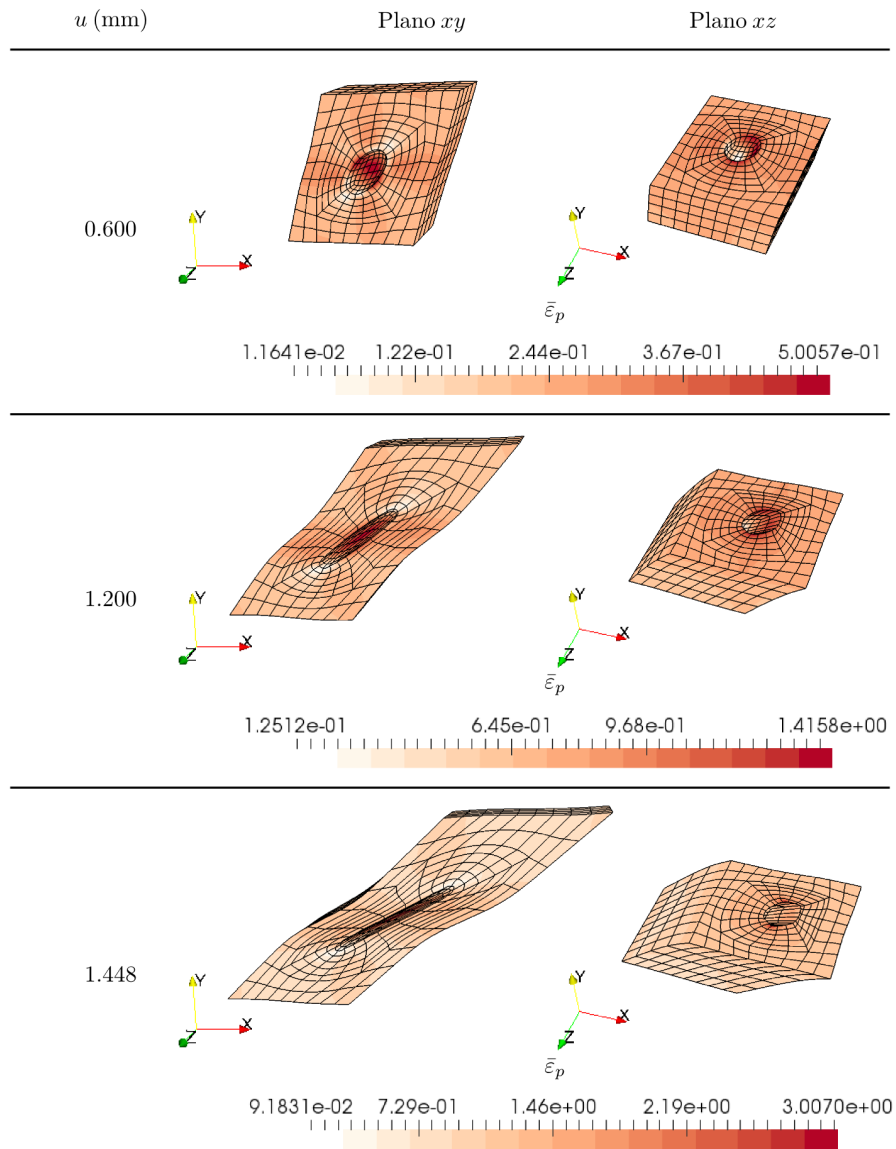


Figura 8.24: Evolução da geometria do vazio e da deformação plástica equivalente no EVR associado ao ponto de Gauss GP 5 do provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

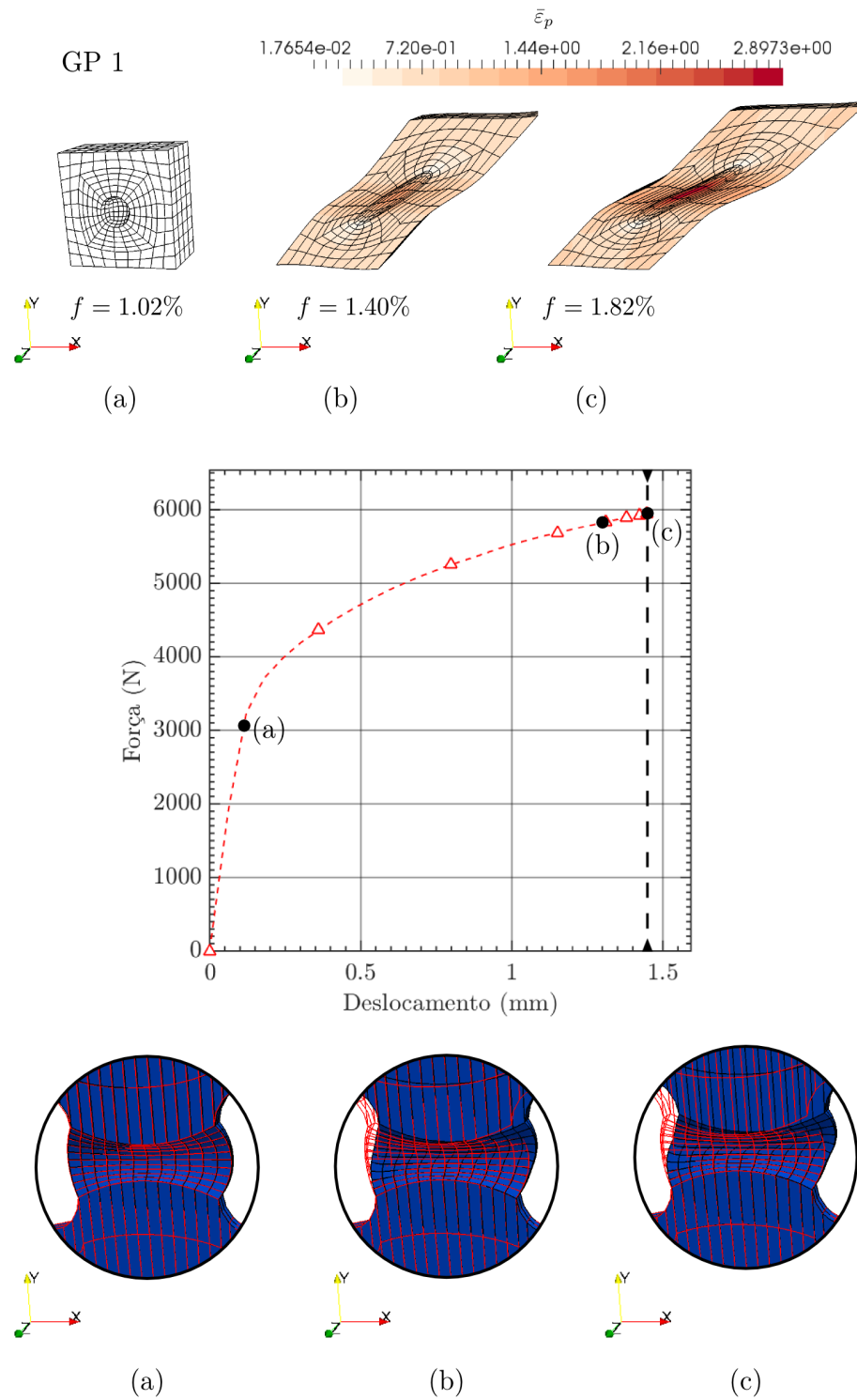


Figura 8.25: Análise multi-escala do provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte ao longo do histórico de deformação. Fator de escala de deformação $\times 1.0$ em ambas as escalas.

8.3.4 Provete borboleta ($\alpha = 0^\circ$)

A deformação sofrida pelo provete é a esperada do ponto de vista físico e idêntica à previamente observada na análise à macroescala pelo modelo de Gurson (ver Figura 7.42). Atendendo à Figura 8.26, observa-se que as curvas força-deslocamento são praticamente coincidentes. A linha vertical a traço interrompido indica o último incremento considerado representativo ($u = 1.20$ mm), na medida em que alguns elementos ao nível do EVR já se encontram excessivamente deformados e alguns vazios se encontram próximos do colapso.

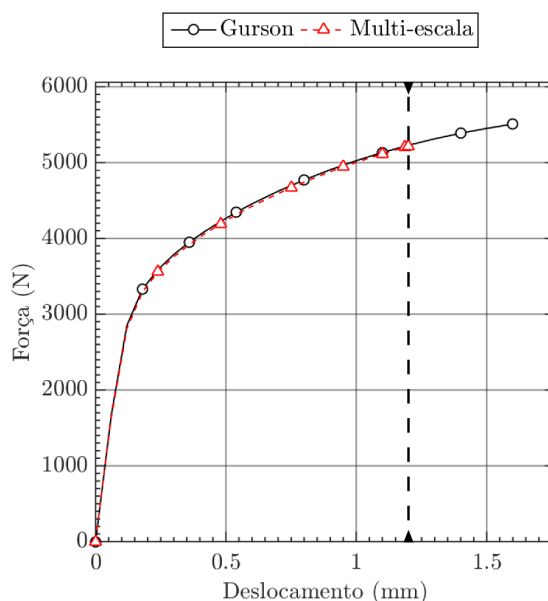


Figura 8.26: Comparação das curvas força-deslocamento obtidas pelo modelo multi-escala e pelo modelo de Gurson para o provete borboleta em solicitação de corte puro.

Nas Figuras 8.27 e 8.28 encontram-se representadas, respetivamente, a distribuição da porosidade e da deformação total equivalente para o último incremento considerado representativo ($u = 1.20$ mm). Comparando as Figuras 8.27 e 7.44 verifica-se que a distribuição macroscópica da porosidade prevista pelos dois modelos é totalmente distinta. No modelo multi-escala o valor da porosidade diminui drasticamente ao longo de toda a espessura da região central do provete (plano xz), o que sugere o colapso dos vazios nesta região. Sabendo que a fratura experimental ocorre na superfície do ponto central do provete (ver Tabela 7.2), conclui-se desde já que a porosidade perde o significado enquanto variável de dano neste regime de triaxialidade. A distribuição apresentada na Figura 8.27 não permite de facto prever de nenhum modo o local de fratura do provete. Nesta figura são ainda novamente indicados os cinco pontos de integração de Gauss selecionados para a análise dos resultados. Em relação à distribuição da deformação total equivalente não existem porém diferenças significativas. Comparando as Figuras 8.28 e 7.45, observa-se que esta se localiza igualmente ao longo da espessura da região central do provete (plano xz), tendendo a uma maior localização na superfície.

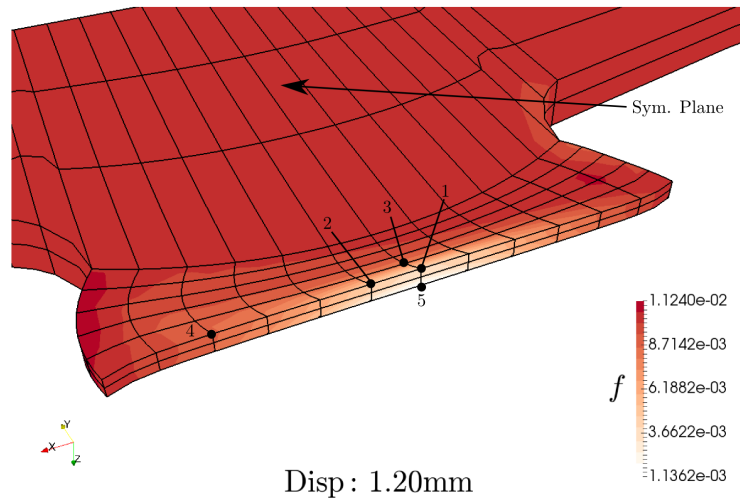


Figura 8.27: Distribuição da porosidade no provete borboleta em solicitação de corte puro obtida pelo modelo multi-escala para o último incremento considerado representativo ($u = 1.20$ mm) e representação das posições aproximadas dos pontos de Gauss para pós-processamento. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

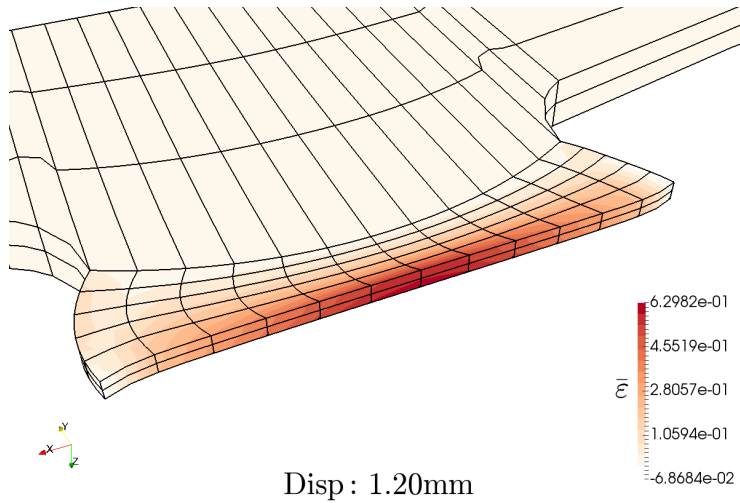
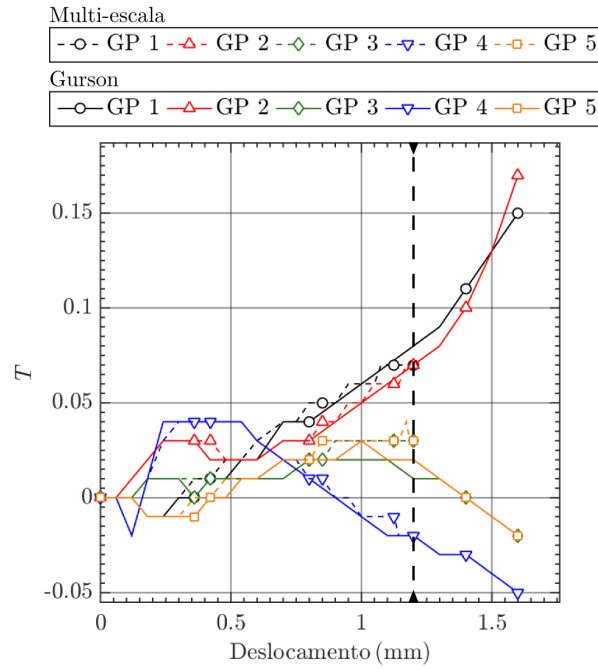
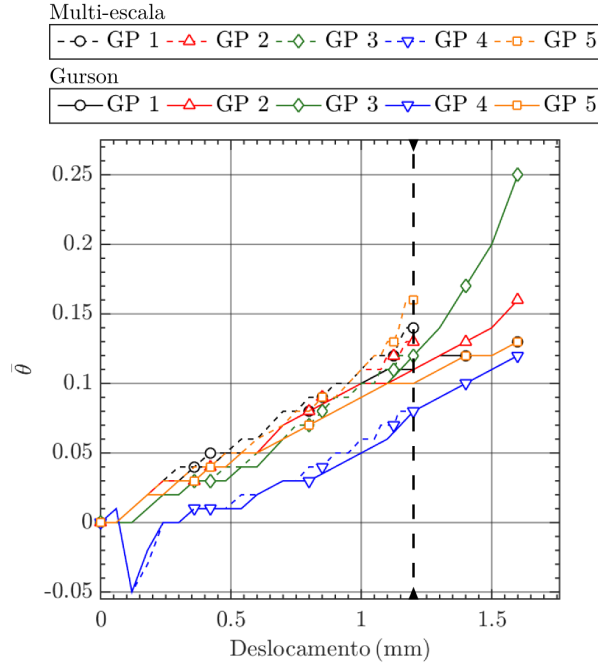


Figura 8.28: Distribuição da deformação total equivalente no provete borboleta em solicitação de corte puro obtida pelo modelo multi-escala para o último incremento considerado representativo ($u = 1.20$ mm). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

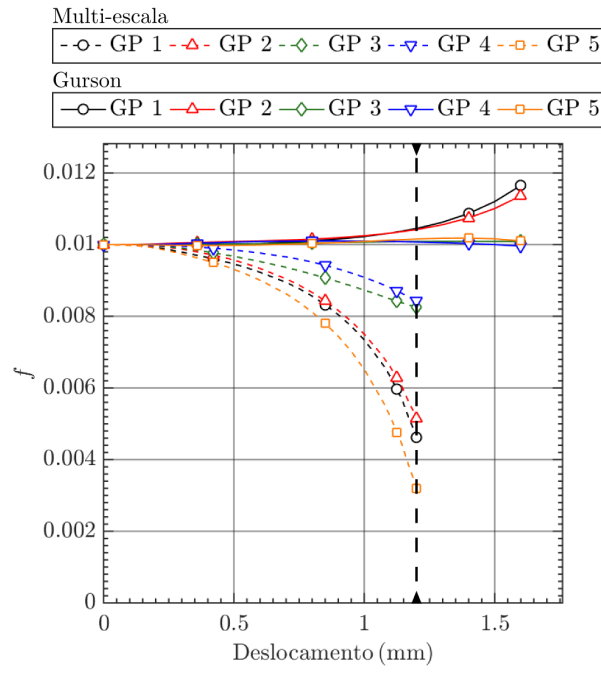
Nas Figuras 8.29(a)-8.29(d) é apresentada a comparação das curvas de porosidade, deformação total equivalente, triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode obtidas pelo modelo multi-escala e pelo modelo de Gurson. Uma primeira observação das curvas de porosidade permite desde logo evidenciar a distribuição macroscópica de porosidade já comentada. Em todos os pontos de Gauss analisados, verifica-se que a porosidade diminui monotonamente praticamente desde o início da solicitação do provete. Este decréscimo é particularmente acentuado nos pontos próximos do centro do provete (GP 1, GP 2 e GP 5), atingindo a porosidade o seu valor mínimo à superfície. Note-se que, nos pontos GP 1 e GP 2, a porosidade diminui mesmo para um valor positivo de triaxialidade ao longo de todo o histórico de deformação, o que é mais uma vez contraditório com a lei de evolução de dano do modelo de Gurson. Em contraste, as diferenças encontradas em relação à deformação total equivalente, triaxialidade e parâmetro do ângulo de Lode são pouco expressivas.



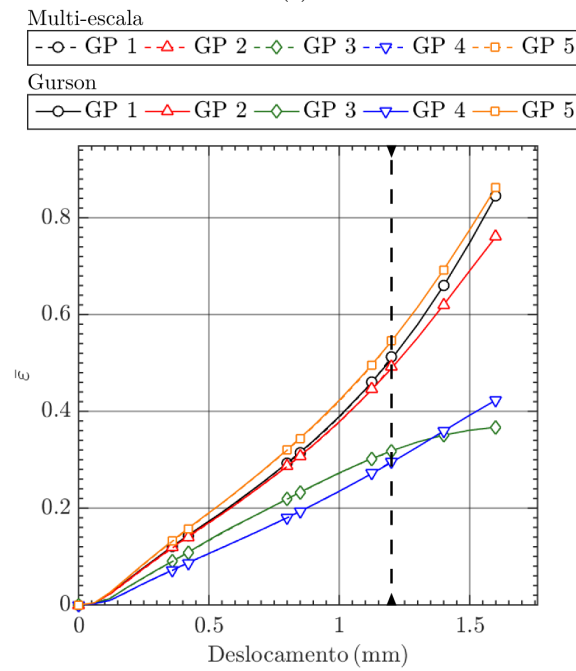
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 8.29: Comparação da evolução das variáveis de interesse entre o modelo multi-escala e o modelo de Gurson nos pontos de Gauss selecionados para o provete borboleta em solicitação de corte puro: (a) triaxialidade; (b) parâmetro do ângulo de Lode; (c) porosidade; (d) deformação total equivalente.

A capacidade de observação dos resultados obtidos ao nível da microestrutura do material é neste caso altamente útil e pertinente para a compreensão clara da limitação do modelo de Gurson no regime de baixa triaxialidade. Atendendo à deformação dos diferentes EVRs apresentada na Figura 8.31, verifica-se imediatamente que todos sofrem uma distorção de corte acentuada e concordante com a solicitação aplicada ao provete. Em consistência com os resultados comentados previamente, observa-se que os vazios tendem a fechar, tomando uma geometria elipsoidal e sofrendo uma rotação que acompanha a distorção do EVR (ver Figura 8.30). Esta deformação é particularmente pronunciada nos pontos próximos do centro do provete (GP 1, GP 2 e GP 5), nos quais os vazios já se encontram próximos do colapso para o último incremento considerado representativo ($u = 1.20 \text{ mm}$). A deformação plástica equivalente localiza-se na vizinhança da superfície do vazio na direção perpendicular ao plano da solicitação de corte (direção z) e apresenta um valor bastante reduzido ao longo de todo o histórico de deformação nas extremidades do vazio inicialmente localizadas segundo a direção y .

Por último, a capacidade de uma análise multi-escala é colocada em evidência na Figura 8.32, onde se encontra indicada a curva força-deslocamento que caracteriza a resposta macroscópica do material. Nesta curva foram selecionados dois pontos notáveis, nomeadamente no início da cedência plástica e no último instante numericamente representativo, e um ponto intermédio. Tendo por base estes pontos, é apresentada uma análise simultânea da deformação global do provete à macroescala e da evolução da microestrutura do material ao longo do histórico de deformação.

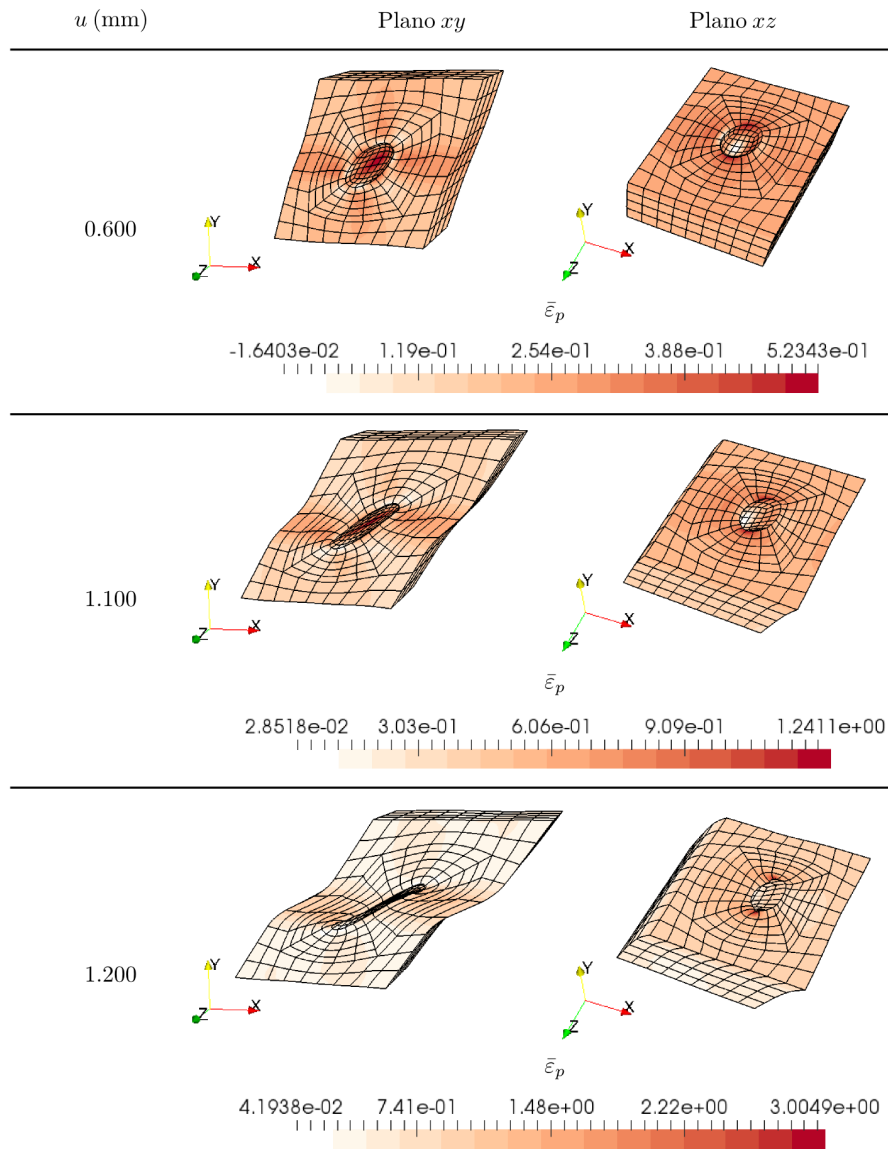


Figura 8.30: Evolução da geometria do vazio e da deformação plástica equivalente no EVR associado ao ponto de Gauss GP 5 do provete borboleta em solicitação de corte puro. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

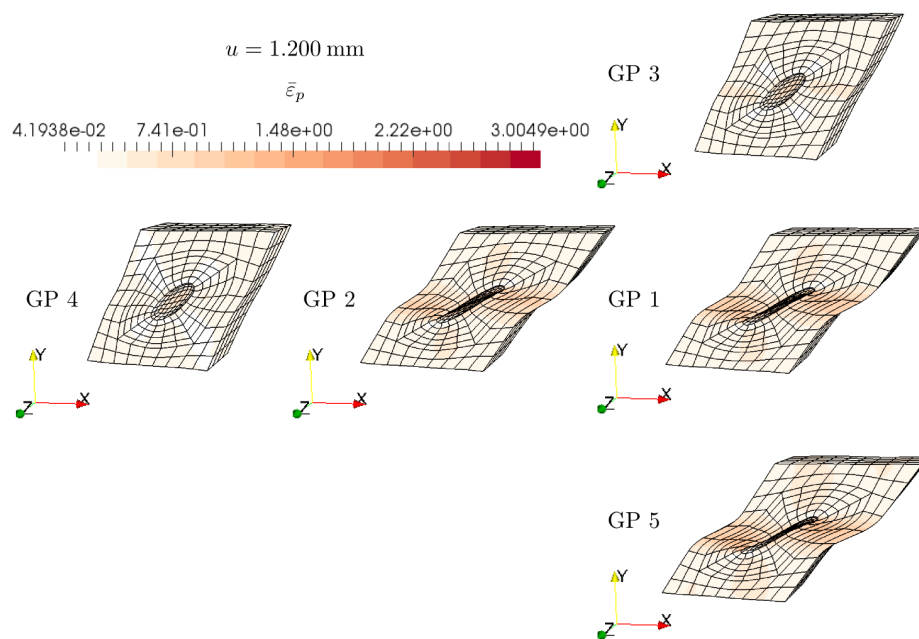


Figura 8.31: Geometria dos vazios e distribuição da deformação plástica equivalente nos EVRs associados aos diferentes pontos de Gauss para o último incremento considerado representativo ($u = 1.20 \text{ mm}$) no provete borboleta em solicitação de corte. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

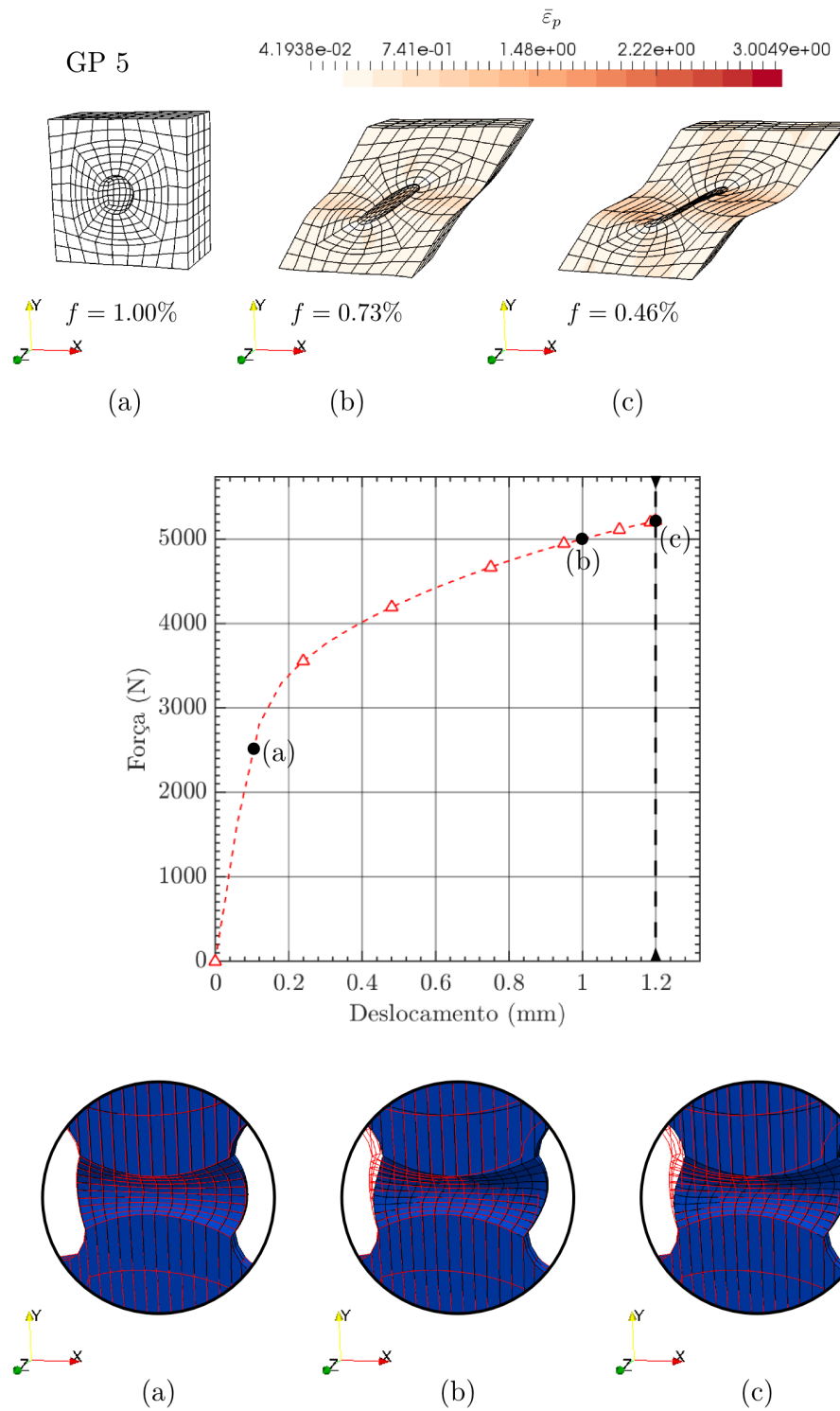


Figura 8.32: Análise multi-escala do provete borboleta em solicitação de corte puro ao longo do histórico de deformação. Fator de escala de deformação $\times 1.0$ em ambas as escalas.

8.4 Influência da porosidade secundária

8.4.1 Introdução

No primeiro conjunto de análises multi-escala realizado anteriormente foi definido um EVR consistente com as hipóteses assumidas no modelo de Gurson. Neste modelo é considerada uma distribuição periódica de EVRs com um único vazio esférico concêntrico, ou seja, é implicitamente assumido que existe apenas uma população de vazios na microestrutura do material. Nesta segunda e breve avaliação multi-escala do modelo de Gurson pretende-se averiguar tal hipótese com base na modelação de um EVR com duas populações de vazios.

Em muitas ligas metálicas estruturais verificou-se que o dano interno pode ser acelerado devido à nucleação de populações de vazios secundários de menores dimensões que crescem e sofrem coalescência nos ligamentos dos vazios primários (Cox and Low (1974), Hahn and Rosenfield (1975), Marini et al. (1985) e Seidenfuss et al. (2011)). Devido à complexidade fenomenológica dos mecanismos envolvidos, a inclusão do efeito da porosidade secundária nos modelos contínuos de crescimento e coalescência de vazios é ainda hoje um dos desafios a ser superado. Apesar disso, as primeiras publicações nas quais este assunto foi abordado remetem para a década de 90, referindo-se os estudos micromecânicos pioneiros de Tvergaard (1996), Faleskog and Shih (1997) e Tvergaard (1998) e a modelação numérica de Brocks et al. (1995) baseada num modelo do tipo Gurson. Uma breve revisão dos estudos realizados desde então pode ser encontrada em Tekoglu (2015) e Khan and Bhasin (2016).

O estudo aqui realizado foi inspirado na recente publicação de Khan and Bhasin (2016), na qual é explorado o efeito da porosidade secundária no crescimento e coalescência de vazios em materiais dúcteis porosos através de análises micromecânicas tridimensionais. Para atingir os objetivos pretendidos, os autores desenvolveram três EVRs distintos em que modelaram explicitamente um vazio central de maior dimensão (representativo da porosidade primária) e diversos vazios de menor dimensão em torno deste com diferentes distribuições espaciais (representativos da porosidade secundária). É considerada uma matriz isotrópica elasto-plástica de acordo com o modelo constitutivo de von Mises e assumida uma lei de endurecimento exponencial. Ao longo do histórico de deformação é considerado um estado de tensão macroscópico equi-biaxial e a triaxialidade é mantida constante mediante imposição de condições de fronteira apropriadas (estratégia de 'carregamento proporcional' já comentada previamente). São apenas modelados vazios de forma esférica e as análises restringem-se ao regime de alta triaxialidade ($1 \leq T \leq 3$). Em primeiro lugar é comparada a resposta do material para diferentes distribuições espaciais dos vazios secundários. Em seguida é considerada uma única distribuição espacial dos vazios secundários e comparada a resposta do material para diferentes valores de porosidade secundária. Por último é estudado o efeito da distância dos vazios secundários em relação ao vazio primário central.

Para realizar uma análise completa dos micromecanismos associados à porosidade secundária e ao seu impacto na resposta do material, é pelo menos necessário contabilizar aspetos estatísticos associados ao tamanho dos vazios e à sua distribuição aleatória no espaço tridimensional. Seria certamente sobre-ambicioso procurar considerar aspetos de tal complexidade no âmbito da presente dissertação, pretendendo-se neste último conjunto de análises somente realizar um pequeno estudo complementar das análises realizadas previamente.

8.4.2 Parâmetros de simulação

Nesta secção são detalhados os parâmetros de simulação relevantes para o conjunto de análises em que se pretende averiguar a influência da porosidade secundária. No entanto, dada a sua pertinência na compreensão das análises previstas, é em primeiro lugar apresentada a definição do EVR com duas populações de vazios.

EVR com múltiplos vazios

Face ao objetivo estabelecido para esta última avaliação do modelo de Gurson, são assumidas algumas hipóteses simplificativas no que diz respeito à modelação de um EVR com duas populações de vazios. Em primeiro lugar, é considerado que todos os vazios apresentam uma geometria inicialmente esférica e que os vazios secundários estão presentes desde o início do histórico de deformação. Estes dois aspetos são consistentes com o modelo de Gurson, no qual os vazios mantêm sempre a sua geometria esférica e não é tido em conta qualquer mecanismo de nucleação. Em segundo lugar, é assumido que todos os vazios secundários apresentam a mesma dimensão, sendo esta representativa do tamanho médio dos vazios de menores dimensões num material real. Por último, em vez de ser modelada uma distribuição aleatória de vazios secundários, é considerada uma distribuição periódica dos mesmos e a sua localização nos ligamentos entre os vazios primários.

Com base nas hipóteses mencionadas, foi definido o EVR cúbico de lado unitário que se encontra representado na Figura 8.33 e caracterizado como se segue:

- *Modelação de dano.* O EVR contém um vazio primário central e um total de seis vazios secundários alinhados ao longo das direções do sistema de eixos cartesiano. O centro de cada vazio secundário é equidistante em relação à superfície do vazio primário e à face correspondente do EVR. Dado que o volume do EVR é unitário e os vazios são esféricos, a porosidade inicial é dada por

$$f_0 = \frac{4}{3}\pi((R_p^v)^3 + 6(R_s^v)^3), \quad (8.5)$$

em que R_p^v e R_s^v são respetivamente os raios do vazio primário e dos vazios secundários. Assumindo que a relação entre estas duas dimensões é dada por $k = R_s^v/R_p^v$ temos

$$R_p^v = \left[\frac{3}{4\pi(6k^3 + 1)} f_0 \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (8.6)$$

$$R_s^v = k \left[\frac{3}{4\pi(6k^3 + 1)} f_0 \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (8.7)$$

Para manter a consistência com as análises já realizadas é igualmente admitida uma porosidade inicial de 1% e, tal como em Khan and Bhasin (2016), é considerada uma relação entre a porosidade primária e a porosidade secundária dada por $f_s/f_p = 0.1$ ($k \approx 0.2554$). Nestas condições resulta $R_p^v \approx 0.1295$ e $R_s^v \approx 0.0331$.

- *Modelo material constitutivo.* É de novo considerado que os vazios se encontram embebidos numa matriz isotrópica elasto-plástica governada pelo modelo constitutivo de von Mises, sendo admitida a lei de endurecimento do material calibrada no Subcapítulo 7.3.

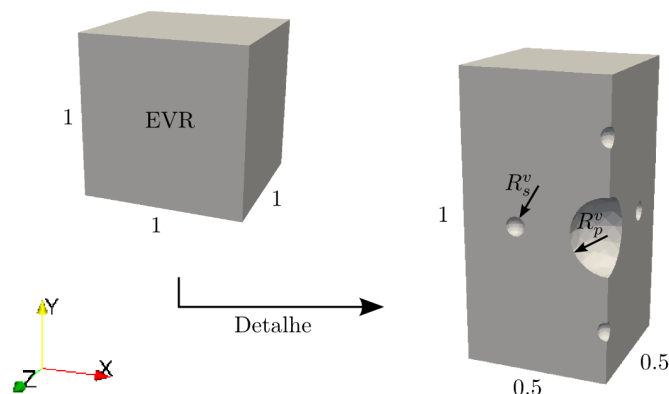


Figura 8.33: Geometria do EVR com duas populações de vazios esféricos.

À semelhança de todos os modelos anteriores, o EVR foi discretizado numa malha estruturada de elementos hexaédricos de vinte nós com integração em oito pontos de Gauss e são consideradas condições de fronteira periódicas. Para definir a malha estruturada (ver Figura 8.34), em torno de cada vazio foi definida uma superfície auxiliar intermédia e uma geometria cúbica envolvente¹, aplicando-se assim uma estratégia semelhante à adotada no caso do EVR com um único vazio. Esta estratégia permite mais uma vez obter uma boa geometria inicial dos elementos, sendo porém dependente de uma escolha adequada das divisões associadas à refinação da malha. Realizou-se, mais uma vez, um estudo de convergência de malha recorrendo a análises micromecânicas e considerando as três malhas representadas na Figura 8.34 com 3776, 9936 e 15120 elementos. Utilizando como critério primordial a variação da resposta homogeneizada do campo de tensões (primeiro tensor de Piola-Kirchhoff homogeneizado), conclui-se que a malha de 3776 elementos apresenta um grau de convergência satisfatório (diferença inferiores a 2.00% face à malha mais refinada). No entanto, verificou-se que a expansão volumétrica dos vazios nesta malha tende a ‘espalmar’ os elementos que se encontram entre o vazio primário e o vazio secundário, particularmente os que se encontram em torno do primeiro num estado avançado de deformação. Este aspeto pode ser melhorado ao considerar um maior discretização na direção circunferencial dos vazios, como é o caso da malha de 9936 elementos, acarretando porém um aumento significativo do número de elementos.

Histórico do gradiente de deformação multi-escala

Idealmente pretendia-se realizar de novo as análises multi-escala considerando em alternativa o EVR com múltiplos vazios. No entanto, atendendo ao tempo disponível e às limitações computacionais associadas a este tipo de análise, não foi possível realizar tal conjunto de simulações. Note-se que a malha mais grosseira do EVR com múltiplos vazios (3776 ele-

¹Note-se que, no caso dos vazios secundários, o vazio e a superfície auxiliar intermédia não estão centrados com a respetiva geometria cúbica envolvente. Tal resulta simplesmente do facto de ter sido imposta a equidistância do centro do vazio secundário em relação à superfície do vazio primário e à respetiva face do EVR.

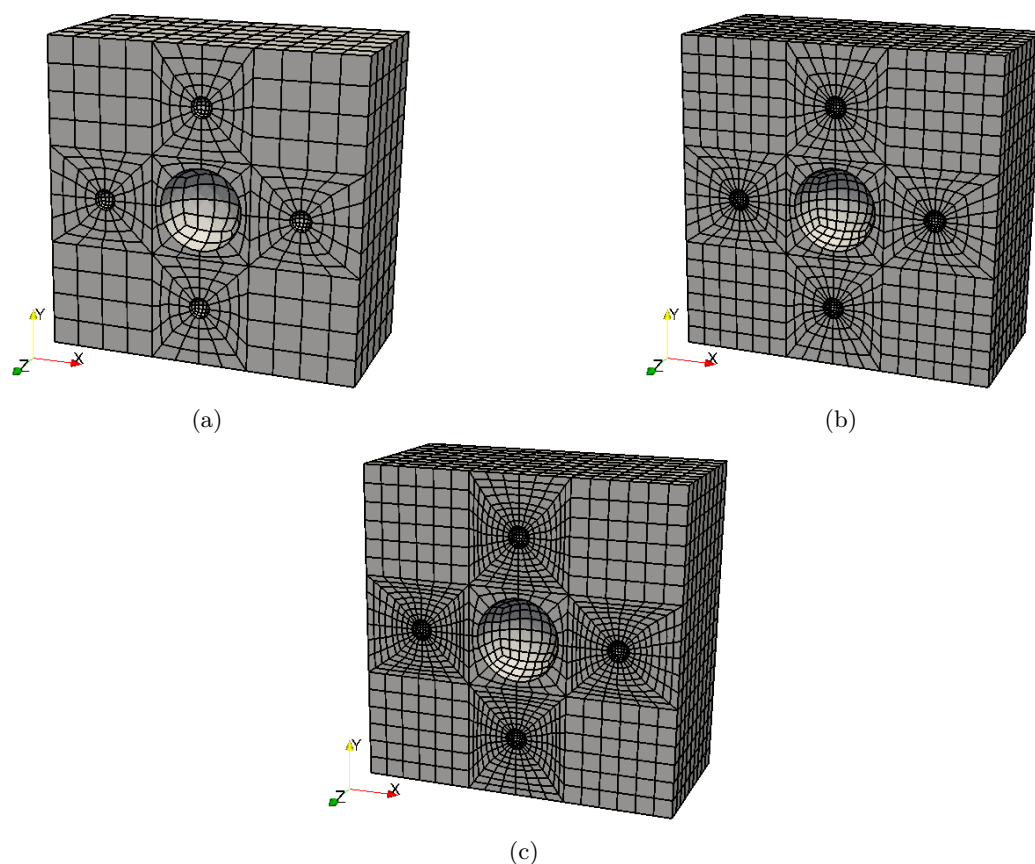


Figura 8.34: Discretização do EVR com múltiplos vazios numa malha estruturada de elementos hexaédricos de vinte nós: (a) 3776 elementos; (b) 9936 elementos; (c) 15120 elementos.

mentos) tem quase o triplo do número de elementos da malha considerada nas análises multi-escala com o EVR com um único vazio (1354 elementos). Este aumento do número de elementos à microescala traduz-se num crescimento muito significativo da dimensão do problema multi-escala, estimando-se tempos computacionais superiores a um mês para cada uma das simulações.

Perante esta limitação desenvolveu-se uma estratégia alternativa de análise para procurar atingir o objetivo estabelecido. A ideia fundamental compreende-se com facilidade: cada análise multi-escala é substituída por uma análise micromecânica na qual é aplicado o histórico do gradiente de deformação armazenado na análise multi-escala em que foi considerado o EVR com um único vazio. A aplicação desta estratégia requereu a implementação computacional apresentada no Subcapítulo 5.4, tratando-se naturalmente de uma aproximação pelo facto de o histórico do gradiente de deformação macroscópico imposto ser calculado com base no EVR com um único vazio. Note-se que a deformação total equivalente calculada será por consequência idêntica, caracterizando neste caso o histórico do gradiente de deformação imposto. No entanto, do ponto de vista conceptual nada condiciona uma avaliação satisfatória da evolução da porosidade e da localização da deformação plástica ao nível

do EVR com múltiplos vazios. A principal limitação desta estratégia prende-se sim com o facto de não ser obtida a distribuição das variáveis de campo no domínio macroscópico nem a curva força-deslocamento.

Com base na estratégia descrita, serão realizadas quatro análises micromecânicas distintas correspondentes aos provetes para os quais se obteve o histórico do gradiente de deformação (ver Subcapítulo 8.2). Para cada um destes provetes será somente analisado o EVR associado a um dos pontos de integração de Gauss previamente selecionados, tal como se encontra indicado na Tabela 8.6. Dado que o esforço computacional associado a

Tabela 8.6: Provetes e respetivos pontos de integração de Gauss onde serão realizadas as análises micromecânicas para avaliar a influência da porosidade secundária em diferentes regimes de triaxialidade.

Proвете	$(T_0, \bar{\theta}_0)$	GP	Localização
Axissimétrico entalhado (R4)	(0.75, 1.00)	1	Figura 7.18
Axissimétrico não-entalhado	(0.33, 1.00)	1	Figura 7.28
Borboleta ($\alpha = 10^\circ$)	(0.11, 0.22)	1	Figura 7.39
Borboleta ($\alpha = 0^\circ$)	(0.00, 0.00)	5	Figura 7.44

uma análise micromecânica é significativamente inferior ao de uma análise multi-escala, é possível utilizar malhas mais refinadas neste conjunto de análises. Dados os comentários já realizados a propósito da malha do EVR com múltiplos vazios, este aspeto é particularmente útil para conseguir capturar um estado de deformação avançado sem incorrer em perdas de representatividade numérica dos resultados obtidos devido à deformação excessiva ou interpenetração de elementos. Por este motivo, e também por uma questão de consistência na comparação de resultados, ambos os EVRs são simulados com base na estratégia definida. Em relação ao EVR com múltiplos vazios será considerada a malha de 9936 elementos (ver Figura 8.34(b)), enquanto no EVR com um único vazio é escolhida a malha mais refinada de 5344 elementos (ver Figura 8.2(a)). O carregamento prescrito e o número de incrementos é totalmente definido pelo histórico do gradiente de deformação imposto. Para além disso, os resultados obtidos são apresentados em função do deslocamento aplicado nos provetes durante a análise multi-escala.

8.4.3 Resultados obtidos

Proвете entalhado (R4)

A evolução da deformação total equivalente que caracteriza o histórico do gradiente de deformação imposto encontra-se representada na Figura 8.35. Como seria expectável, a curva é perfeitamente coincidente com aquela apresentada na Figura 8.6(d).

Na Figura 8.36(a) são apresentadas as curvas de evolução da porosidade obtidas para o EVR com um vazio, para o EVR com múltiplos vazios e pelo modelo de Gurson. Como será justificado mais à frente, a análise dos resultados obtidos é apenas considerada representativa e apresentada até $u = 1.19$ mm. Em primeiro lugar, verifica-se que até $u \approx 0.60$ mm as curvas associadas a ambos os EVRs são praticamente coincidentes. Após este instante, as curvas tendem a divergir, sendo previsto um crescimento da porosidade ligeiramente mais acentuado no EVR com múltiplos vazios. Para o último incremento considerado representa-

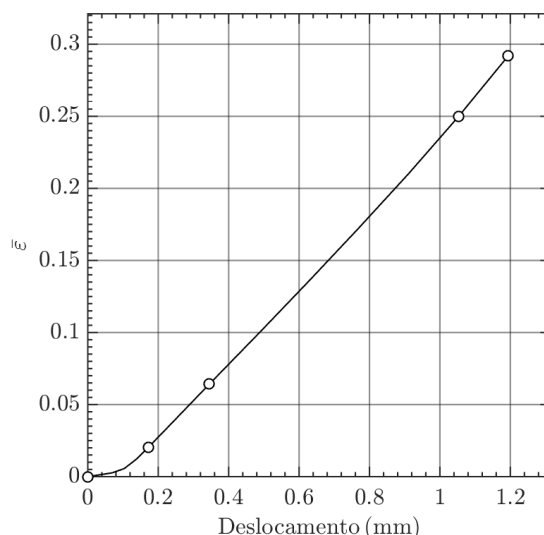


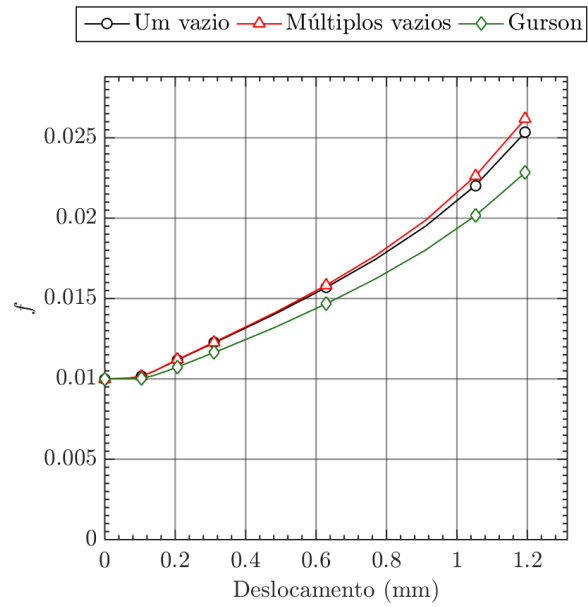
Figura 8.35: Deformação total equivalente associada ao histórico do gradiente de deformação obtido através da análise multi-escala do provete entalhado (R4).

tivo ($u = 1.19$ mm), a diferença registada é de 0.1% em termos de porosidade. Atendendo à Figura 8.36(b), verifica-se também que as curvas de triaxialidade associadas aos dois EVRs tendem a divergir, registando-se valores de triaxialidade menores no EVR com múltiplos vazios. O parâmetro do ângulo de Lode é igual a 1 para todas as curvas, motivo pelo qual se omite a respetiva representação gráfica. Ainda que não muito expressiva, os aspetos mencionados sugerem uma certa influência da população secundária de vazios no comportamento do material, tendendo esta a aumentar com o deslocamento aplicado.

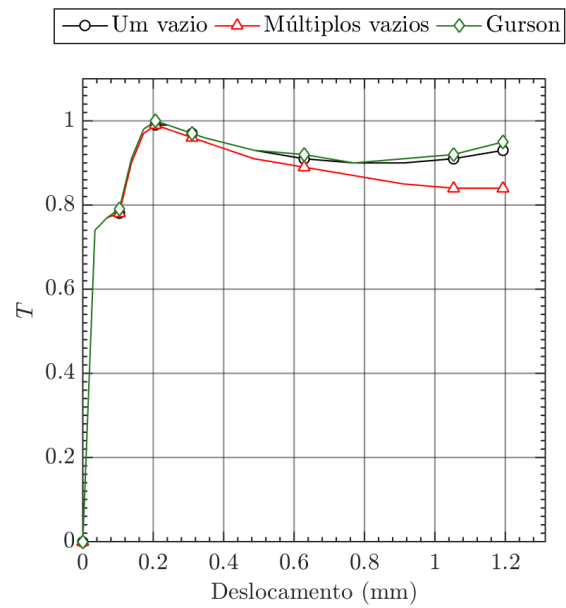
Para procurar compreender e justificar os resultados obtidos será analisada a microestrutura do EVR com múltiplos vazios, sendo dada particular atenção à evolução geométrica dos vazios, pertinente ao nível da evolução da porosidade, e à distribuição da deformação plástica equivalente. Na Figura 8.37 é apresentado o estado de deformação e a distribuição de deformação plástica equivalente para três incrementos selecionados ao longo do histórico de deformação. Até $u = 0.345$ mm o aumento da porosidade é maioritariamente resultado do crescimento do vazio primário, ocorrendo uma distorção pouco expressiva dos vazios secundários. Pode observar-se que o vazio primário tende a tomar a geometria de um esferoide prolato, crescendo preferencialmente segundo a direção de sollicitação do provete. Verifica-se que a deformação plástica equivalente se localiza na superfície do vazio primário e dos vazios secundários do plano horizontal (plano xy), nomeadamente segundo uma direção transversal à sollicitação do provete. Para $u = 0.770$ mm o vazio primário já sofreu um crescimento significativo, não só segundo a direção de sollicitação do provete, como também transversalmente, na sua dimensão radial. O crescimento dos vazios secundários é agora apreciável, tomando também estes a geometria de esferoides prolatos. Note-se que este é ligeiramente mais pronunciado nos vazios do plano horizontal. Apesar da distribuição de

deformação plástica equivalente ser essencialmente semelhante ao instante anterior, o seu valor máximo é agora atingido na superfície dos vazios secundários do plano horizontal que delimita o ligamento com o vazio primário. Estes dois aspetos sugerem o início da interação entre as duas populações de vazios. Para $u = 1.194$ mm os aspetos comentados no incremento anterior são evidenciados. O crescimento dos vazios secundários do plano horizontal é significativamente superior ao dos vazios secundários na direção de solicitação do provete. A localização da deformação plástica na superfície interior dos primeiros é mais acentuada e observa-se que estes tendem a crescer em direção ao vazio primário. É plausível assumir que tal interação entre as duas populações de vazios justifica a divergência das curvas após um determinado nível de crescimento dos vazios.

A aproximação entre o vazio primário e os vazios secundários do plano horizontal resultam na deformação excessiva e eventual interpenetração dos elementos nos respetivos ligamentos, limitando a representatividade dos resultados obtidos ao último incremento considerado previamente. Apesar do crescimento da porosidade ainda não ser muito significativo, a evolução da microestrutura sugere a posterior ocorrência de coalescência por estricção interna localizada no plano transversal à direção de solicitação. O programa LINKS ainda não possui a capacidade de modelar tal mecanismo, a qual envolveria necessariamente a possibilidade de rotura entre elementos, regeneração de malha e consequente fusão de vazios adjacentes. Ao nível da deformação do EVR, parece plausível assumir que tal fenómeno resultaria num crescimento mais acentuado da porosidade e numa maior divergência das curvas até à rotura do provete.



(a)



(b)

Figura 8.36: Comparação da evolução da (a) porosidade e da (b) triaxialidade entre o EVR com um vazio, o EVR com múltiplos vazios e o modelo de Gurson na análise do provete entalhado (R4).

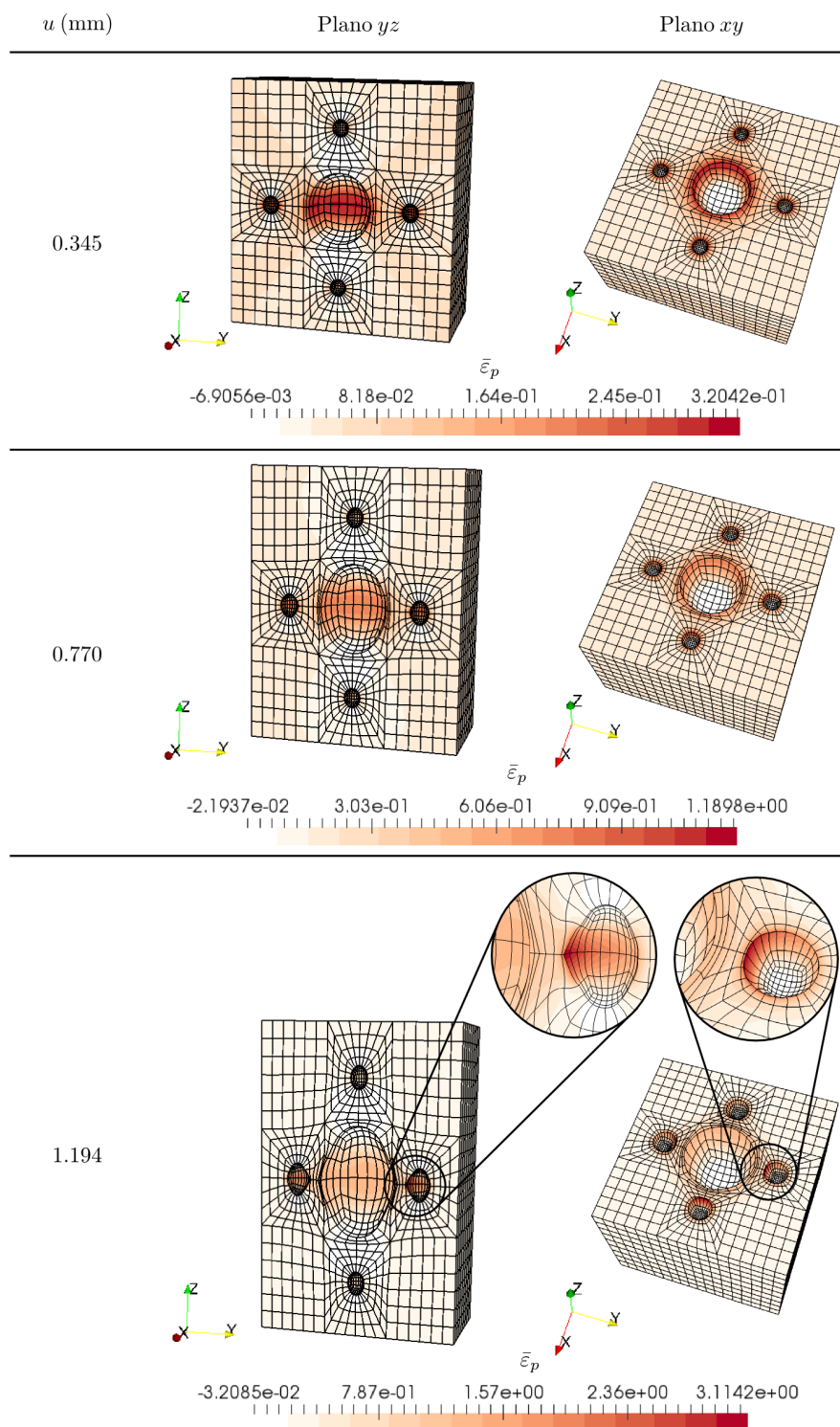


Figura 8.37: Evolução do estado de deformação e da distribuição de deformação plástica equivalente no EVR com múltiplos vazios para três instantes do histórico de deformação do provete entalhado (R4). Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

Provete não-entalhado

A evolução da deformação total equivalente que caracteriza o histórico do gradiente de deformação imposto encontra-se representada na Figura 8.38. Como seria expectável, a curva é perfeitamente coincidente com aquela apresentada na Figura 8.13(d).

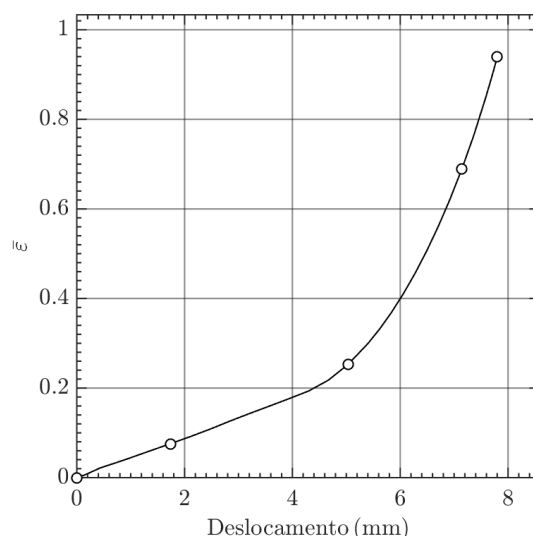


Figura 8.38: Deformação total equivalente associada ao histórico do gradiente de deformação obtido através da análise multi-escala do provete não-entalhado.

Na Figura 8.39 é apresentada a curva de evolução da porosidade obtida para o EVR com um vazio, para o EVR com múltiplos vazios e pelo modelo de Gurson. Pelos mesmos motivos comentados na análise do provete entalhado (R4), a análise dos resultados obtidos foi apenas considerada representativa até $u = 7.145$ mm. A evolução das curvas associadas a ambos os EVRs é praticamente coincidente ao longo de todo o histórico de deformação, o que sugere que a população secundária de vazios não tem nenhuma influência apreciável até este instante do histórico de deformação. As curvas de triaxialidade e do parâmetro do ângulo de Lode são também coincidentes, sendo este último igual a 1 para todas as curvas.

À semelhança da análise anterior, na Figura 8.40 é apresentado o estado de deformação e a distribuição de deformação plástica equivalente do EVR com múltiplos vazios para três incrementos selecionados ao longo do histórico de deformação. Até $u = 3.933$ mm, apesar do aumento da porosidade ser ainda pouco expressivo, o vazio primário e os vazios secundários já sofreram uma distorção apreciável e tomam a geometria de esferoides prolatos. A deformação plástica equivalente localiza-se numa região próxima da superfície do vazio primário e dos vazios secundários do plano horizontal, nomeadamente segundo uma direção transversal à solicitação do provete. Para $u = 6.273$ mm observa-se que todos os vazios sofreram um crescimento significativo segundo a direção de solicitação do provete, apesar da sua dimensão radial não sofrer uma variação apreciável ao longo do plano transversal à direção de solicitação (plano xy). Neste caso, a aproximação entre o vazio primário e

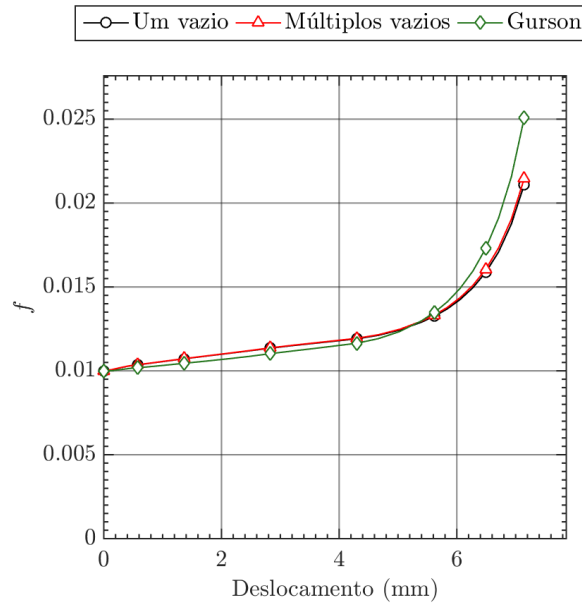


Figura 8.39: Comparação da evolução da porosidade entre o EVR com um vazio, o EVR com múltiplos vazios e o modelo de Gurson na análise do provete não-entalhado.

os vazios secundários do plano horizontal deve-se essencialmente à elongação acentuada do EVR e consequente diminuição da sua secção transversal em relação à direção de solicitação. Apesar da distribuição de deformação plástica equivalente ser essencialmente semelhante ao instante anterior, verifica-se que, nos vazios secundários do plano horizontal, esta localiza-se preferencialmente na superfície do ligamento com o vazio primário. Não é porém observada qualquer deformação mais acentuada destes vazios na direção do mesmo. Finalmente, para $u = 7.145$ mm os aspetos comentados anteriormente são igualmente aplicáveis, notando somente que o valor máximo da deformação plástica equivalente é agora atingido na superfície interior dos vazios secundários do plano horizontal. Mais uma vez não é verificada qualquer interação apreciável entre as duas populações de vazios ao nível da sua deformação.

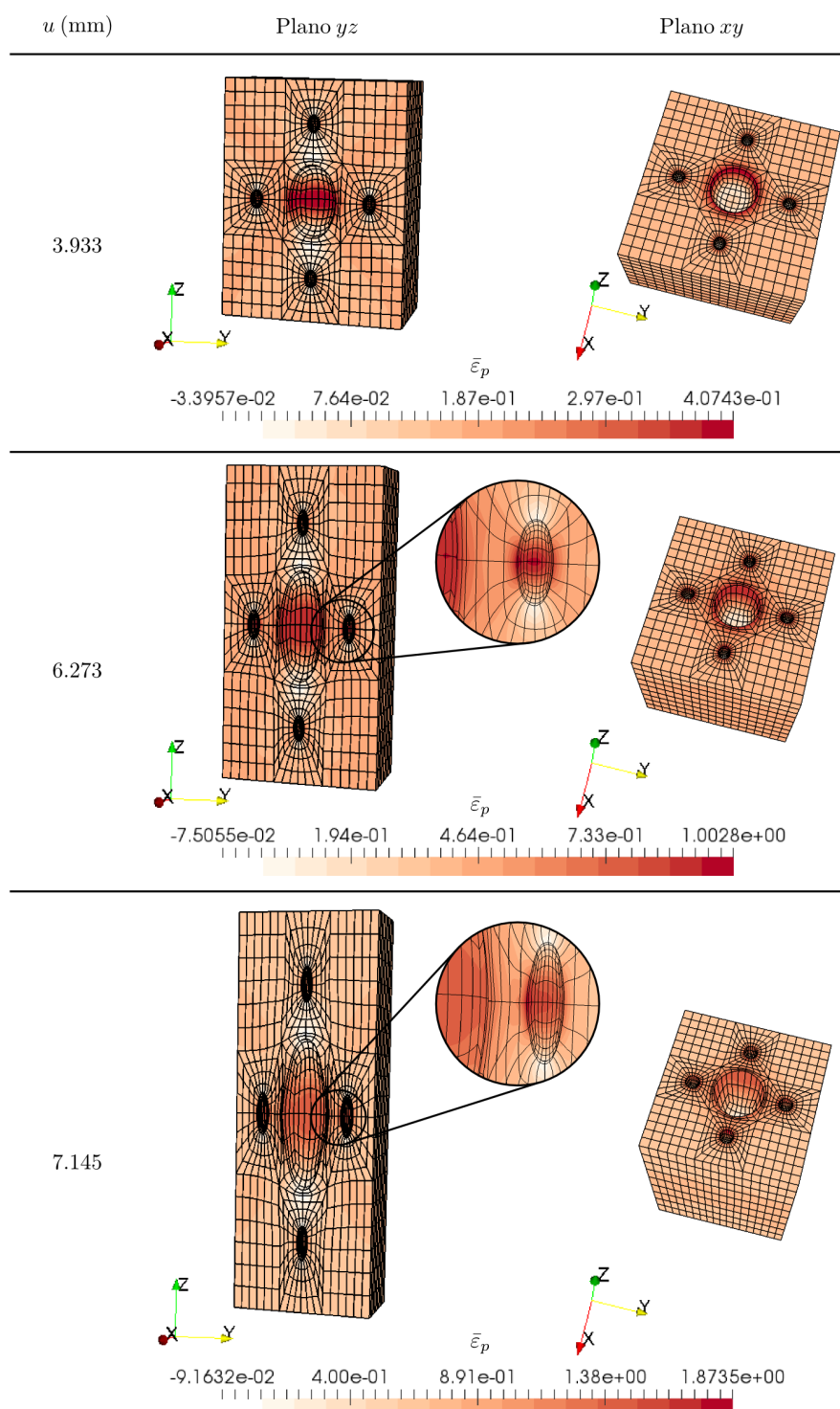


Figura 8.40: Evolução do estado de deformação e da distribuição de deformação plástica equivalente no EVR com múltiplos vazios para três instantes do histórico de deformação do provete não-entalhado. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

Provete borboleta ($\alpha = 10^\circ$)

A evolução da deformação total equivalente que caracteriza o histórico do gradiente de deformação imposto encontra-se representada na Figura 8.41. Esta é perfeitamente coincidente com aquela apresentada na Figura 8.21(d).

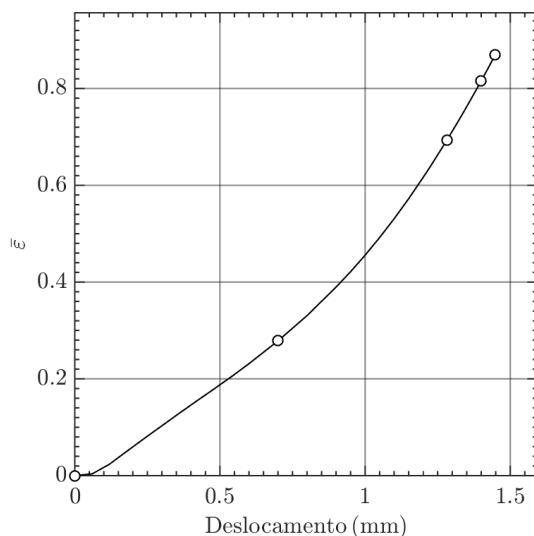
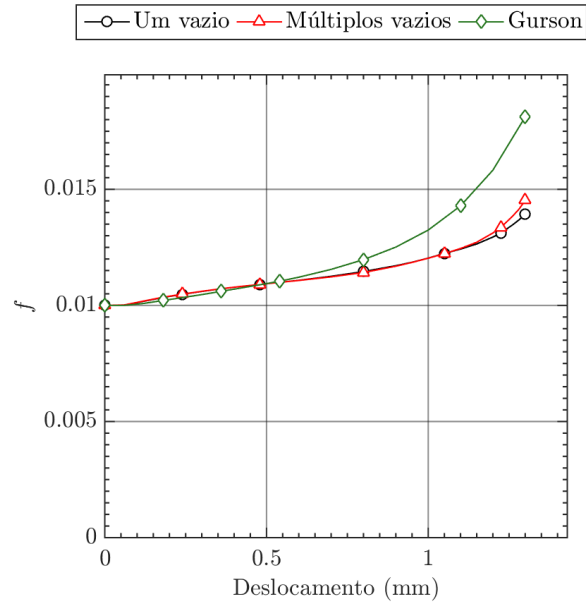


Figura 8.41: Deformação total equivalente associada ao histórico do gradiente de deformação obtido através da análise multi-escala do provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte.

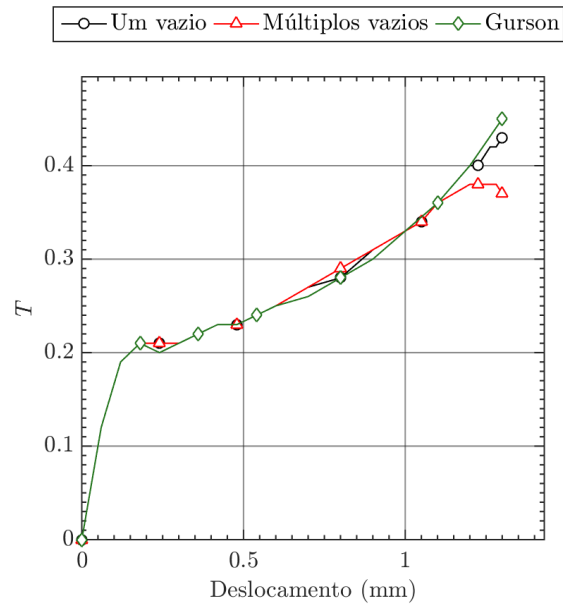
Na Figura 8.42(a) é apresentada a curva de evolução da porosidade obtida para o EVR com um vazio, para o EVR com múltiplos vazios e pelo modelo de Gurson. Como será justificado mais à frente, a análise dos resultados obtidos foi apenas considerada representativa até $u = 1.30$ mm. Até $u \approx 1.15$ mm, as curvas associadas a ambos os EVRs são praticamente coincidentes. Apesar das curvas apresentarem uma ligeira divergência após este instante, a diferença registrada para o último incremento considerado representativo é de 0.05% em termos de porosidade, valor considerado desprezável. A mesma divergência é observada nas curvas de triaxialidade apresentadas na Figuras 8.42(b).

Na Figura 8.43 é apresentado o estado de deformação e a distribuição de deformação plástica equivalente do EVR com múltiplos vazios para três incrementos selecionados ao longo do histórico de deformação. Até $u = 0.600$ mm observa-se que todos os vazios foram sujeitos a uma distorção de corte, tomando uma geometria elipsoidal e sofrendo uma rotação que acompanha a distorção do EVR. Verifica-se que a deformação plástica equivalente se localiza nas extremidades dos vazios segundo a direção z , sendo mais acentuada no plano central horizontal. Para $u = 1.000$ mm, a distorção de corte dos vazios é mais acentuada e o próprio EVR principia a ser deformado ao longo de uma banda de corte horizontal. Deve notar-se que os vazios secundários localizados ao longo deste plano de corte sofrem uma distorção mais pronunciada que os vazios secundários localizados segundo a direção y .

A deformação plástica equivalente é agora significativamente mais acentuada em todos os vazios do plano horizontal de corte do EVR, mantendo-se a sua localização nas respetivas extremidades segundo a direção z . Ao nível da sua deformação não é verificada qualquer interação entre as duas populações de vazios. Desde o incremento anterior até $u = 1.300\text{mm}$, a deformação dos vazios e do EVR concentrou-se essencialmente ao longo do plano horizontal de corte. O vazio primário e os vazios secundários neste localizados já não apresentam uma geometria elipsoidal e os últimos estão próximos de sofrer colapso. O programa LINKS ainda não possui a capacidade de modelar contacto, pelo que quaisquer resultados após este instante não seriam numericamente válidos. Observa-se que a deformação do vazio primário é modificada devido à presença dos vazios secundários no plano horizontal de corte e a localização da deformação plástica equivalente ao longo deste último é evidente.



(a)



(b)

Figura 8.42: Comparação da evolução da (a) porosidade e da (b) triaxialidade e entre o EVR com um vazio, o EVR com múltiplos vazios e o modelo de Gurson na análise do provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte.

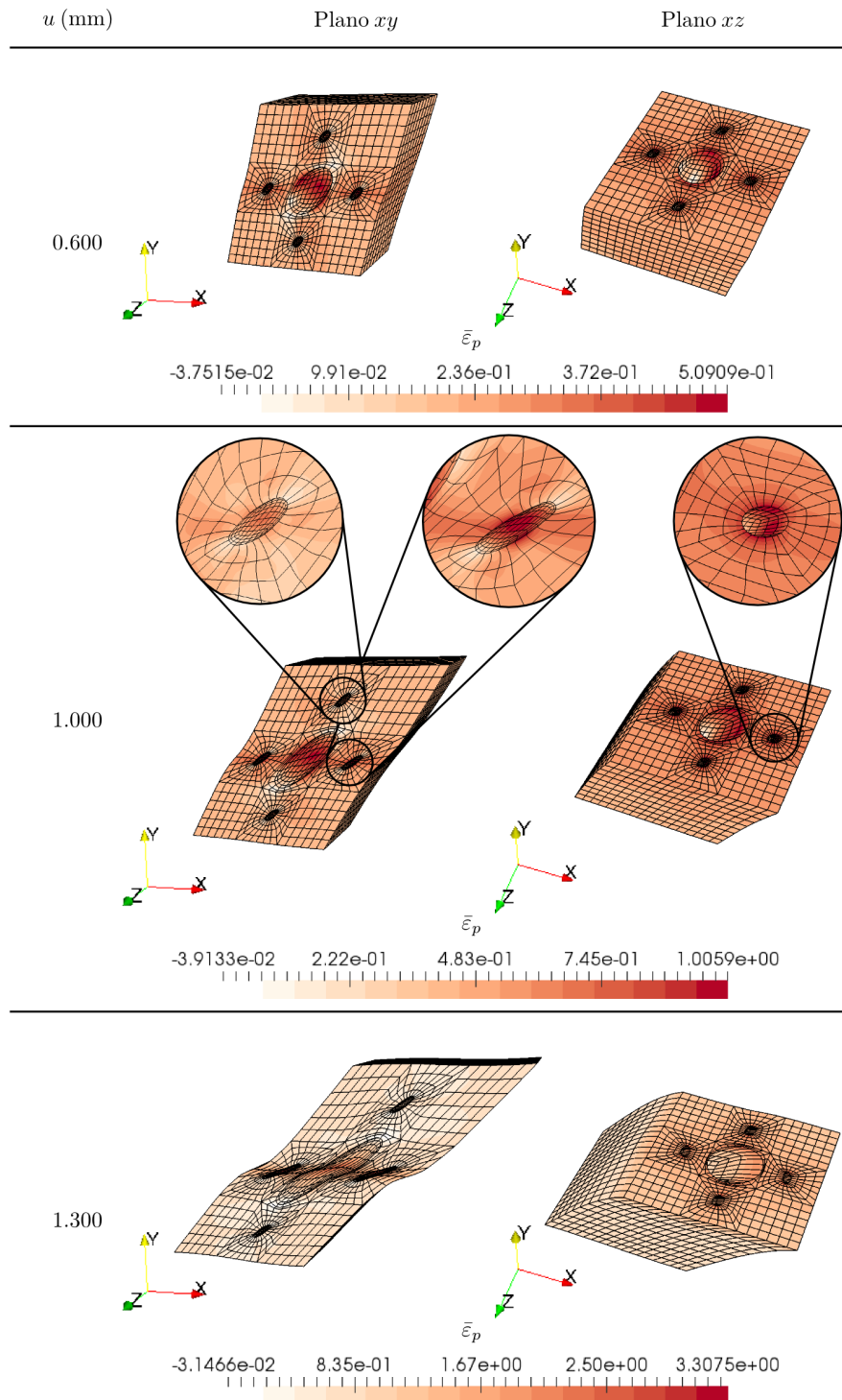


Figura 8.43: Evolução do estado de deformação e da distribuição de deformação plástica equivalente no EVR com múltiplos vazios para três instantes do histórico de deformação do provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

Provete borboleta ($\alpha = 0^\circ$)

A evolução da deformação total equivalente que caracteriza o histórico do gradiente de deformação imposto encontra-se representada na Figura 8.44. Esta é perfeitamente coincidente com aquela apresentada na Figura 8.29(d).

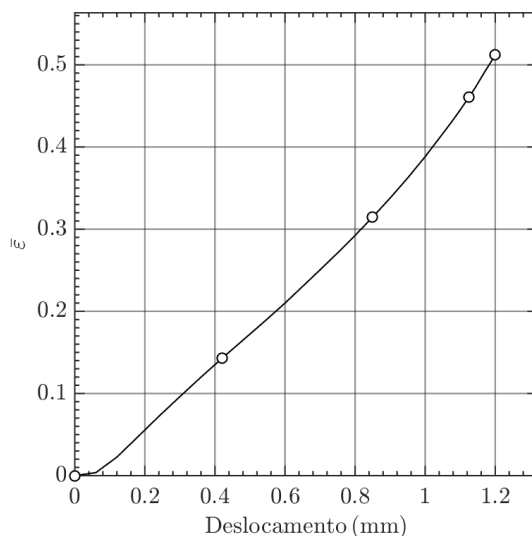


Figura 8.44: Deformação total equivalente associada ao histórico do gradiente de deformação obtido através da análise multi-escala do provete borboleta em solitação de corte puro.

Na Figura 8.45 é apresentada a curva de evolução da porosidade obtida para o EVR com um vazio, para o EVR com múltiplos vazios e pelo modelo de Gurson. Como será justificado mais à frente, a análise dos resultados obtidos foi apenas considerada representativa até $u = 1.00\text{mm}$. A evolução das curvas associadas a ambos os EVRs é praticamente coincidente ao longo de todo o histórico de deformação, o que sugere que a população secundária de vazios não tem nenhuma influência apreciável no comportamento do material.

Na Figura 8.46 é apresentado o estado de deformação e a distribuição de deformação plástica equivalente do EVR com múltiplos vazios para três incrementos selecionados ao longo do histórico de deformação. Até $u = 0.600\text{mm}$ observa-se que todos os vazios foram sujeitos a uma distorção de corte acentuada, tomando uma geometria elipsoidal e sofrendo uma rotação que acompanha a distorção do EVR. Verifica-se que a deformação plástica equivalente se localiza nas extremidades dos vazios segundo a direção z , sendo mais acentuada no plano central horizontal. Para $u = 0.800\text{mm}$, a distorção de corte dos vazios é mais acentuada e o próprio EVR principia a ser deformado ao longo de um plano de corte horizontal. Deve notar-se que os vazios secundários localizados ao longo deste plano de corte sofrem uma distorção mais pronunciada que os vazios secundários localizados segundo a direção y . A deformação plástica equivalente é agora significativamente mais acentuada em todos os vazios do plano horizontal de corte do EVR, mantendo-se a sua localização nas respetivas extremidades segundo a direção z . Ao nível da sua deformação não é verificada

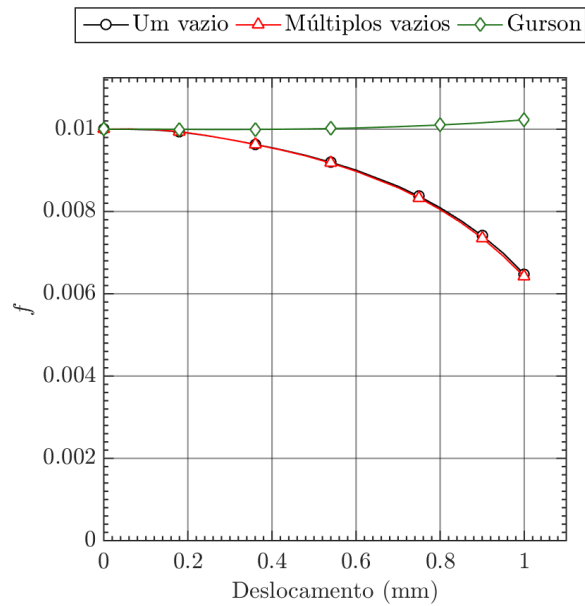


Figura 8.45: Comparação da evolução da porosidade entre o EVR com um vazio, o EVR com múltiplos vazios e o modelo de Gurson na análise do provete borboleta em solicitação de corte puro.

qualquer interação entre as duas populações de vazios. Desde o incremento anterior até $u = 1,000$ mm, a deformação dos vazios e do EVR concentrou-se essencialmente ao longo do plano horizontal de corte. O vazio primário e os vazios secundários neste localizados já não apresentam uma geometria elipsoidal e os últimos estão próximos de sofrer colapso. O programa LINKS ainda não possui a capacidade de modelar contacto, pelo que quaisquer resultados após este instante não seriam numericamente válidos. Observa-se que a deformação do vazio primário é ligeiramente modificada devido à presença dos vazios secundários no plano horizontal de corte e a localização da deformação plástica equivalente ao longo deste último é evidente.

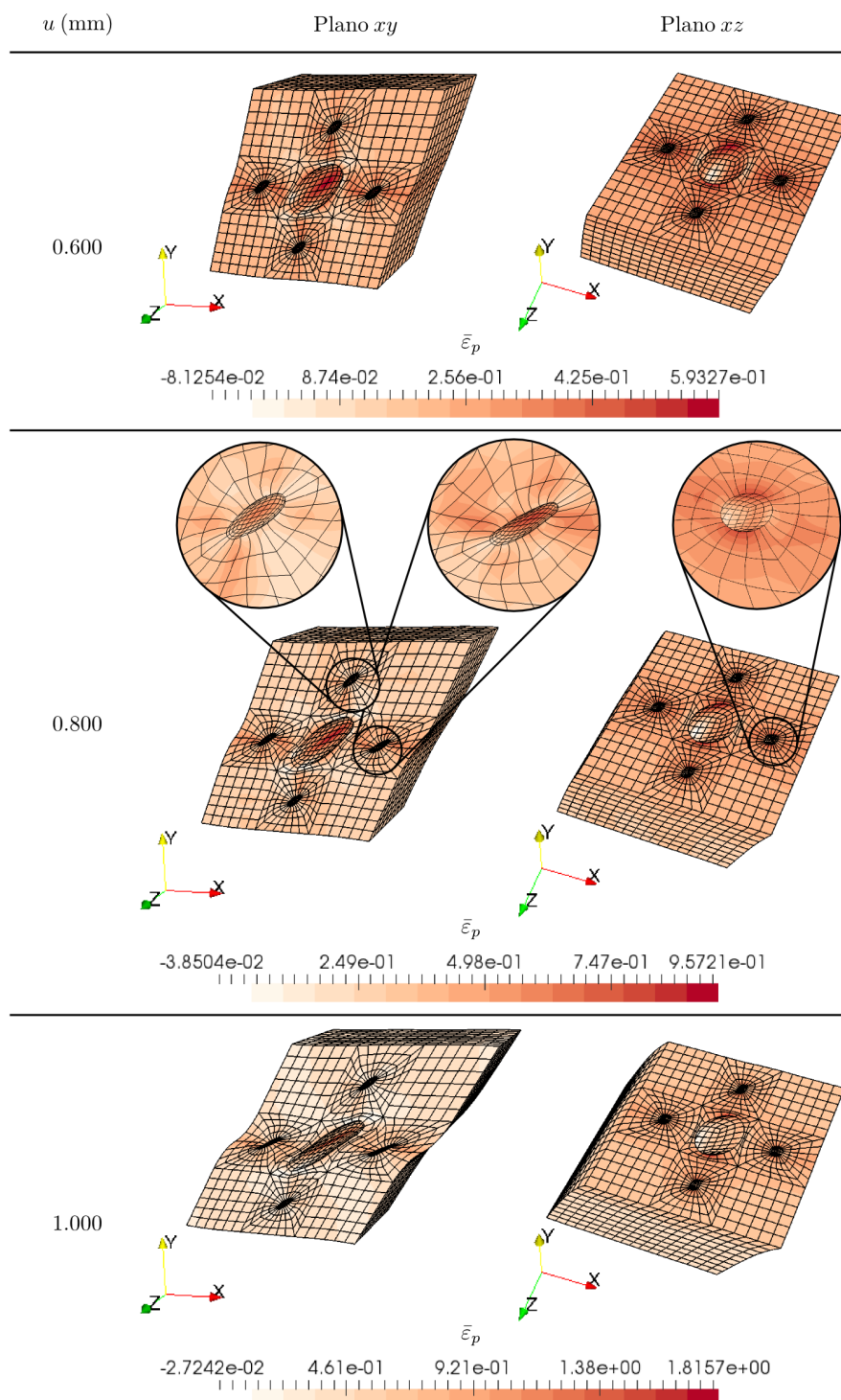


Figura 8.46: Evolução do estado de deformação e da distribuição de deformação plástica equivalente no EVR com múltiplos vazios para três instantes do histórico de deformação do provete borboleta em sollicitação de corte puro. Fator de escala de deformação $\times 1.0$.

8.5 Conclusões

Neste capítulo procura-se atingir o objetivo principal da presente dissertação, o qual consiste na avaliação da precisão do modelo de Gurson em diferentes regimes de triaxialidade tendo como referência um modelo multi-escala baseado em homogeneização computacional. Para além disso, pretende-se também evidenciar as potencialidades disponibilizadas por uma análise multi-escala.

Para o primeiro conjunto de análises define-se um EVR consistente com as hipóteses assumidas pelo modelo de Gurson ao nível da microestrutura do material. Em particular, o dano é explicitamente modelado ao introduzir na matriz um vazio esférico central, cujo raio é função da porosidade inicial assumida. Apesar dos esforços realizados no sentido de otimizar a topologia e refinação das malhas (macroscópica e microscópica) e a incrementação do deslocamento prescrito, o tempo computacional associado a cada simulação multi-escala é bastante significativo. Face ao tempo disponível, selecionam-se dois dos provetes na gama de alta triaxialidade (proвете entalhado (R4) e provete não-entalhado) e os dois provetes na gama de baixa triaxialidade (proвете borboleta em solicitação combinada de tração e corte e em solicitação de corte puro). No regime de alta triaxialidade obtêm-se curvas força-deslocamento praticamente coincidentes entre ambos os modelos. Também as distribuições de porosidade e de deformação total equivalente são semelhantes, sendo o local de fratura corretamente previsto. Estes dois aspetos do domínio macroscópico sugerem uma boa capacidade de previsão do modelo de Gurson neste regime de triaxialidade. No entanto, em ambos os provetes verificam-se diferenças apreciáveis nas curvas de evolução de porosidade, particularmente nos pontos onde o estado de dano é mais pronunciado. Tomando um dado valor crítico da porosidade, verifica-se que as diferenças encontradas em ambos os provetes podem conduzir a erros significativos no deslocamento previsto na fratura. O modelo multi-escala permite averiguar tais diferenças através da análise dos diferentes EVRs ao longo do histórico de deformação, evidenciando simultaneamente algumas críticas pertinentes às hipóteses assumidas pelo modelo de Gurson. Em primeiro lugar, conclui-se que a porosidade é uma variável de dano adequada para descrever o estado de dano do material neste regime de triaxialidade. Porém, observa-se que os vazios, apesar de inicialmente esféricos, não mantêm a geometria esférica ao longo do seu crescimento. Em ambos os provetes, estes crescem preferencialmente na direção de solicitação do provete, tomando a geometria de esferoides prolatos que tende a acentuar-se com o aumento do deslocamento aplicado. Em segundo lugar, conclui-se que para além do crescimento propriamente dito, a evolução geométrica dos vazios associados aos diferentes EVRs pode ser distinta, sendo neste caso evidenciada pelas razões de proporção dos esferoides. Conclui-se que a hipótese de um crescimento puramente esférico e uma lei de evolução de porosidade que apenas depende da componente volumétrica da taxa de deformação plástica não permitem capturar com precisão o comportamento real da microestrutura do material. Tendo por base as observações realizadas à microescala, conclui-se que a precisão do modelo de Gurson no regime de alta triaxialidade pode ser melhorada através da incorporação da anisotropia resultante da geometria dos vazios mediante variáveis internas apropriadas. No regime de baixa triaxialidade as curvas força-deslocamento são igualmente coincidentes em ambos os modelos, notando-se somente uma ligeira divergência no provete borboleta em solicitação combinada de tração e corte. Neste último, as distribuições macroscópicas de porosidade e de deformação plástica equivalente são semelhantes, sendo o local de fratura corretamente previsto. Porém, em todos os pontos analisados são identificadas diferenças significativas nas curvas de evolução

de porosidade, não só a nível numérico, como também ao nível da evolução. Em relação ao provete borboleta em solicitação de corte puro, a distribuição macroscópica de porosidade é totalmente distinta e sugere desde logo dificuldades do modelo de Gurson em caracterizar o estado de dano neste regime de triaxialidade. Neste caso, a evolução das curvas de porosidade obtidas pelo modelo multi-escala revela que esta diminui monotonamente em todos os pontos analisados, o que permite concluir que a variável de dano do modelo de Gurson não é adequada para descrever o estado de dano nestas condições de triaxialidade. Para além disso, em ambos os provetes observam-se diminuições de porosidade associadas a valores positivos de triaxialidade, aspeto totalmente contraditório com a lei de evolução de dano do modelo de Gurson. A capacidade de análise multi-escala permite compreender e justificar as diferenças encontradas através da observação da microestrutura ao longo do histórico de deformação. Em ambos os provetes, os EVRs e respetivos vazios sofrem uma distorção de corte acentuada que se encontra em total desacordo com a hipótese de crescimento assumida pelo modelo de Gurson. Enquanto a componente de tração da solicitação combinada conduz a uma certa alongação do vazio que permite um crescimento da porosidade, na solicitação de corte puro os vazios tendem mesmo a colapsar. Conclui-se que a precisão do modelo de Gurson no regime de baixa triaxialidade pode ser melhorada ao incorporar uma medida da distorção de corte dos vazios na variável de dano do modelo e na respetiva lei de evolução.

No segundo conjunto de análises procura-se averiguar a hipótese assumida pelo modelo de Gurson de que o estado de dano do material pode ser devidamente representado por uma única população de vazios. Com base num conjunto de hipóteses simplificativas, foi modelado um novo EVR com duas populações de vazios esféricos, sendo as respetivas dimensões definidas em função da porosidade inicial e da razão entre as porosidades primária e secundária assumidas. Para superar limitações de tempo computacional, desenvolveu-se uma nova estratégia aproximada de análise multi-escala. Esta permitiu atingir o objetivo pretendido através de análises micromecânicas nas quais a perturbação ao equilíbrio do EVR foi imposta com base no histórico do gradiente de deformação armazenado no conjunto prévio de análises multi-escala. Em relação ao regime de alta triaxialidade, no caso do provete entalhado (R4) verifica-se uma certa interação ao nível da deformação entre as duas populações de vazios, a qual resulta num crescimento da porosidade ligeiramente mais acentuado e sugere o início da ocorrência de coalescência por estricção interna localizada. Em contraste, apesar de uma distorção significativa dos vazios no caso do provete não-entalhado, não se verifica qualquer interação ao nível de deformação entre as duas populações de vazios. Tal diferença parece ser mais uma vez resultado de um crescimento distinto dos vazios nos dois casos, nomeadamente no que diz respeito ao aumento da dimensão radial dos vazios no plano transversal à direção de solicitação. Note-se que, no caso do provete não-entalhado, a aproximação entre o vazio primário e os vazios secundários neste plano foi essencialmente promovida pela alongação do EVR. Em relação ao regime de baixa triaxialidade, verificou-se que a presença dos vazios secundários resultou somente numa modificação pouco expressiva da deformação do vazio primário central em ambas as solicitações do provete borboleta. Não se verifica qualquer diferença expressiva nas curvas de evolução de porosidade e não ocorreu nenhuma interação propriamente dita entre as duas populações de vazios ao nível de deformação. De modo geral, tendo por base todas as hipóteses assumidas e considerando o histórico de deformação prévio à ocorrência de coalescência ou de colapso de vazios, conclui-se que quer no regime de alta triaxialidade quer no regime de baixa triaxialidade a população secundária não tem uma influência expressiva na evolução da porosidade durante a fase de crescimento dos vazios.

Capítulo 9

Conclusões Gerais e Perspetivas de Trabalhos Futuros

9.1 Conclusões gerais

O principal objetivo da presente dissertação consiste na aplicação de um modelo multi-escala baseado em homogeneização computacional para avaliar a precisão do modelo de Gurson na previsão da evolução de dano associada à fratura dúctil de ligas metálicas. Apesar de terem surgido algumas limitações a nível do tempo computacional das simulações multi-escala, as principais metas estabelecidas são alcançadas e o principal objetivo atingido.

O primeiro conjunto de análises realizado à macroescala promoveu uma compreensão do comportamento do modelo de Gurson, em particular da distribuição, evolução e localização do dano previsto em provetes representativos de diferentes regimes de triaxialidade. Na região de alta triaxialidade conclui-se que o modelo de Gurson apresenta uma boa capacidade de prever a evolução do dano ao longo do histórico de deformação, sendo esta acompanhada de forma consistente pela deformação global dos provetes e respetivas curvas força-deslocamento. De acordo com observações experimentais conhecidas, também o local de fratura dos provetes é corretamente previsto. Em contraste, no regime de baixa triaxialidade conclui-se que o modelo de Gurson apresenta dificuldades em prever a evolução de dano ao longo do histórico de deformação, verificando que esta é limitada face à deformação global sofrida pelos provetes. Este aspeto é particularmente evidente numa solicitação de corte puro. Para os provetes em causa, a curva força-deslocamento é pouco esclarecedora, já que é esperado que a perda da capacidade de carga ocorra de forma abrupta no instante imediatamente precedente à fratura, não se verificando qualquer amaciamento.

No primeiro conjunto de análises multi-escala, nas quais é considerado um EVR consistente com as hipóteses assumidas pelo modelo de Gurson, avalia-se a precisão deste modelo quer no domínio macroscópico quer no domínio microscópico. Na região de alta triaxialidade conclui-se que o modelo de Gurson capta corretamente a curva força-deslocamento e de forma satisfatória as distribuições macroscópicas de porosidade e deformação total equivalente. Porém verificam-se diferenças apreciáveis nas curvas de evolução da porosidade, particularmente na região onde o dano é mais pronunciado, as quais são justificadas com base na observação da deformação dos vazios ao nível microscópico. Conclui-se que a hipótese de um crescimento puramente esférico dos vazios e uma lei de evolução de porosidade

que apenas depende da componente volumétrica da taxa de deformação plástica não permitem capturar com precisão o comportamento real da microestrutura do material. Com base nas observações à microescala, conclui-se que a precisão do modelo de Gurson no regime de alta triaxialidade pode ser melhorada através da incorporação no modelo, mediante variáveis internas apropriadas, da anisotropia resultante da geometria dos vazios.

Na região de baixa triaxialidade, apesar da curva força-deslocamento ser também corretamente captada, a distribuição macroscópica de porosidade no provete borboleta solicitado em corte puro revelou de imediato a incapacidade do modelo de Gurson em caracterizar o estado de dano do material. Em relação às curvas de evolução de porosidade, verificam-se diferenças significativas não só em termos numéricos, como também ao nível da evolução. As observações à microescala permitem concluir que os vazios sofrem uma distorção de corte acentuada e sofrem uma rotação que acompanha a deformação do material. Conclui-se que a hipótese de crescimento e lei assumidas no modelo de Gurson para descrever a evolução da porosidade são pouco adequadas e que a variável de dano do modelo tende a perder o seu significado neste regime de triaxialidade. Conclui-se que a precisão do modelo de Gurson pode ser melhorada ao incorporar uma medida da distorção de corte dos vazios na variável de dano do modelo e na respetiva lei de evolução.

No segundo conjunto de análises multi-escala, nas quais é considerado um EVR com duas populações de vazios, verifica-se que quer no regime de alta triaxialidade quer no regime de baixa triaxialidade a população secundária de vazios não tem uma influência expressiva na evolução da porosidade durante a fase de crescimento prévia à ocorrência de coalescência ou de colapso de vazios. Tendo em conta o conjunto de hipóteses simplificativas assumidas, conclui-se deste estudo complementar que a hipótese de representatividade de uma única população de vazios implicitamente assumida pelo modelo de Gurson é plausível até aos limites referidos.

Em conclusão, é importante referir que na presente dissertação é somente dado um dos primeiros passos no que diz respeito à exploração da capacidade da modelação multi-escala no contexto da fratura dúctil de metais e ligas metálicas estruturais. As potencialidades desencadeadas por este tipo de análise lançam indiscutivelmente um amplo conjunto de novos desafios e oportunidades à comunidade científica, os quais irão certamente contribuir para avanços significativos na capacidade de previsão do comportamento dos materiais e no desenvolvimento de materiais com melhores propriedades.

9.2 Perspetivas de trabalhos futuros

No âmbito da fratura dúctil de metais e ligas metálicas estruturais, a presente dissertação deixa em aberto um conjunto de desafios e oportunidades pertinentes:

- Em primeiro lugar, as análises realizadas na presente dissertação podem ser estendidas através de diversos estudos complementares. No que diz respeito ao modelo de Gurson, seria interessante completar a sua avaliação considerando diferentes valores de porosidade inicial, em particular inferiores a 1.0%. Também um estudo comparativo da sua capacidade de previsão para metais e ligas metálicas com diferentes propriedades poderia resultar em conclusões pertinentes. Apesar da hipóteses simplificativas que são assumidas, seria ainda interessante explorar com maior detalhe a influência da porosidade secundária, em particular começando por considerar diferentes distribuições espaciais dos vazios secundários e várias razões entre as porosidades primária e secundária.

- No seguimento do trabalho desenvolvido, o mesmo conjunto de análises pode ser realizado na avaliação da precisão do modelo de Gurson-Tvergaard-Needleman, procurando compreender e validar a melhoria do modelo de Gurson através da introdução de parâmetros heurísticos e de modificações à lei de evolução da porosidade. Em particular, seria interessante avaliar a proposta de modificação da lei de evolução da porosidade proposta por Nahshon and Hutchinson (2008) para incorporar heurísticamente a evolução de dano em condições de baixa triaxialidade.
- Estão também estabelecidas as bases para avaliar os modelos em que é incorporada a anisotropia resultante da geometria de vazios, como o modelo de Gologanu-Leblond-Deveaux (Gologanu et al. (1993), Gologanu et al. (1994), Gologanu et al. (1997)) e o modelo de Madou-Leblond (Madou and Leblond (2012a), Madou and Leblond (2012b), Madou and Leblond (2013a), Madou and Leblond (2013b)), bem como os modelos que integram a anisotropia plástica da matriz, nomeadamente o modelo de Benzerga e Besson (Benzerga and Besson, 2001), o modelo de Keralavarma e Benzerga (Keralavarma and Benzerga (2008), Keralavarma and Benzerga (2010)) e o mais recente modelo de Morin-Leblond-Kondo (Morin et al., 2015b).
- Certamente de maior exigência é a análise da evolução de dano sob trajetórias de deformação mais complexas, promovidas por solicitações não-monotónicas ou cíclicas por exemplo. Também a modelação dos micromecanismos de nucleação e coalescência de vazios consiste num grande desafio que irá envolver necessariamente a modelação de fenómenos de interface e de contacto.

Para terminar, apesar de tais aspetos não se enquadrarem propriamente no domínio da presente dissertação, é importante referir que o elevado peso computacional das simulações multi-escala consiste atualmente num dos maiores obstáculos da sua aplicação. Por este motivo é pertinente desenvolver estratégias que visem reduzir o tempo computacional associado a este tipo de análise, nomeadamente ao nível computacional, ou estratégias de análise híbridas, como por exemplo integração multi-escala seletiva.

Página intencionalmente deixada em branco

Bibliografia

- AbdelAl, N. R. (2009). An experimental study of deformation and fracture of a nanostructured metallic material. Master's thesis, Texas A&M University.
- Achour, M., Germain, G., Santo, P. D., and Saidane, D. (2013). Experimental characterization and numerical modeling of micromechanical damage under different stress states. *Materials & Design*, 50.
- Agoras, M. and Castañeda, P. P. (2013). Iterated linear comparison bounds for viscoplastic porous materials with “ellipsoidal” microstructures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 61.
- Agoras, M. and Castañeda, P. P. (2014). Anisotropic finite-strain models for porous viscoplastic materials with microstructure evolution. *International Journal of Solids and Structures*, 51.
- Argon, A. S. and Im, J. (1975). Separation of second phase particles in spheroidized 1045 steel, cu-0.6pct cr alloy, and maraging steel in plastic straining. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 6.
- Argon, A. S., Im, J., and Safoglu, R. (1975). Cavity formation from inclusions in ductile fracture. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 6.
- Babout, L., Brechet, Y., Maire, E., and Fougères, R. (2004a). On the competition between particle fracture and particle decohesion in metal matrix composites. *Acta Materialia*, 52.
- Babout, L., Maire, E., and Fougères, R. (2004b). Damage initiation in model metallic materials: X-ray tomography and modelling. *Acta Materialia*, 52.
- Bai, Y. (2008). *Effect of Loading History on Necking and Fracture*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Bai, Y. and Wierzbicki, T. (2008). A new model of metal plasticity and fracture with pressure and lode dependence. *International Journal of Plasticity*, (24):1071–1096.
- Bai, Y. and Wierzbicki, T. (2015). A comparative study of three groups of ductile fracture loci in the 3d space. *Engineering Fracture Mechanics*, 135.
- Bao, Y. (2003). *Prediction of Ductile Crack Formation in Incracked Bodies*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.

- Bao, Y. and Wierzbicki, T. (2004). On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. *International Journal of Mechanical Sciences*, (46):81–89.
- Barsoum, I. and Faleskog, J. (2007a). Rupture mechanisms in combined tension and shear—experiments. *International Journal of Solids and Structures*, 44.
- Barsoum, I. and Faleskog, J. (2007b). Rupture mechanisms in combined tension and shear—micromechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 44.
- Beachem, C. D. (1963). An electron fractographic study of the influence of plastic strain conditions upon ductile rupture processes in metals. *Trans ASM*, (56).
- Becker, R. and Needleman, A. (1986). Effect of yield surface curvature on necking and failure in porous plastic solids. *Journal of Applied Mechanics*, 53.
- Benallal, A., Desmorat, R., and Fournage, M. (2014). An assessment of the role of the third stress invariant in the gurson approach for ductile fracture. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 47.
- Benzerga, A., Besson, J., and Pineau, A. (2004). Anisotropic ductile fracture: Part ii: theory. *Acta Materialia*, 52.
- Benzerga, A. A. (2000). *Rupture ductile des tôles anisotropes*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- Benzerga, A. A. (2002). Micromechanics of coalescence in ductile fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50.
- Benzerga, A. A. and Besson, J. (2001). Plastic potentials for anisotropic porous solids. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 20.
- Benzerga, A. A., Besson, J., and Pineau, A. (1999). Coalescence-controlled anisotropic ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 121.
- Benzerga, A. A. and Leblond, J.-B. (2010). Ductile fracture by void growth to coalescence. *Advances in Applied Mechanics*, (44):169–305.
- Benzerga, A. A. and Leblond, J.-B. (2013). Effective yield criterion accounting for microvoid coalescence. *Journal of Applied Mechanics*, 81.
- Benzerga, A. A., Leblond, J.-B., Needleman, A., and Tvergaard, V. (2016). Ductile failure modeling. *International Journal of Fracture*, 201.
- Beremin, F. M., Pineau, A., Mudry, F., Devaux, J., DEscatha, Y., and Ledermann, P. (1981). Experimental and numerical study of the different stages in ductile rupture: application to crack initiation and stable crack growth. In Nemat-Nasser, S., editor, *Three-dimensional constitutive equations of amage and fracture*, pages 157–172. Pergamon Press.
- Bergman, T. L., Lavine, A. S., Incropera, F. P., and DeWitt, D. P. (2011). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley & Sons, Inc., 7th edition.
- Besson, J. (2010). Continuum models of ductile fracture: A review. *International Journal of Damage Mechanics*, 19.

- Bishop, R. F., Hill, R., and Mott, N. F. (1945). The theory of indentation and hardness tests. *Proceedings of the Physical Society*, 57.
- Bonet, J. and Wood, R. D. (2008). *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press, 2nd edition.
- Brocks, W., Sun, D.-Z., and Hömig, A. (1995). Verification of the transferability of micromechanical parameters by cell model calculations with visco-plastic materials. *International Journal of Plasticity*, 11.
- Brown, L. M. and Embury, J. D. (1973). Initiation and growth of voids at second phase particles. *3rd International Conference on the Strength of Metals and Alloys*, pages 164–169.
- Carvalho, R. P. (2015). Determinação de parâmetros macroscópicos através de modelos multi-escala. Master's thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Castañeda, P. P. (1991). The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39.
- Castañeda, P. P. (2002). Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations: I—theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50.
- Castañeda, P. P. (2012). Bounds for nonlinear composites via iterated homogenization. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60.
- Castañeda, P. P. and Zaidman, M. (1994). Constitutive models for porous materials with evolving microstructure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42.
- Chae, D. and Koss, D. A. (2004). Damage accumulation and failure of hsla-100 steel. *Materials Science and Engineering: A*, 366.
- Chu, C. C. and Needleman, A. (1980). Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 102.
- Clayton, J. Q. and Knott, J. F. (1976). Observations of fibrous fracture modes in a pre-trained low-alloy steel. *Metal Science*, 10.
- Cottrell, A. H. (1959). *Theoretical aspects of fracture*. Chapman and Hall.
- Cox, T. B. and Low, J. R. (1974). An investigation of the plastic fracture of aisi 4340 and 18 nickel-200 grade maraging steels. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 5.
- Dahl, J., Nielsen, K. L., and Tvergaard, V. (2012). Effect of contact conditions on void coalescence at low stress triaxiality shearing. *Journal of Applied Mechanics*, 79.
- Danas, K. and Castañeda, P. P. (2009a). A finite-strain model for anisotropic viscoplastic porous media: I – theory. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 28.
- Danas, K. and Castañeda, P. P. (2009b). A finite-strain model for anisotropic viscoplastic porous media: II – applications. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 28.

- de Souza Neto, E. A. and Feijóo, R. A. (2008). On the equivalence between spatial and material volume averaging of stress in large strain multi-scale solid constitutive models. *Mechanics of Materials*, 40.
- de Souza Neto, E. A. and Feijóo, R. A. (2006). Variational foundations of multi-scale constitutive models of solid: Small and large strain kinematical formulation. Technical report, LNCC R&D.
- de Souza Neto, E. A., Peric, D., and Owen, D. R. J. (2008). *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*. Wiley.
- Edelson, B. I. and Baldwin, W. M. (1962). The effect of second phases on the mechanical properties of alloys. *Trans ASM*, (55):238–250.
- Faleskog, J. and Shih, C. (1997). Micromechanics of coalescence—i. synergistic effects of elasticity, plastic yielding and multi-size-scale voids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45.
- Feyel, F. and Chaboche, J.-L. (2000). Fe2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183.
- Fleck, N. A. and Hutchinson, J. W. (1986). Void growth in shear. *Proceedings Mathematical Physical & Engineering Sciences*, 407.
- Gao, X. and Kim, J. (2006). Modeling of ductile fracture: Significance of void coalescence. *International Journal of Solids and Structures*, 43.
- Gao, X., Wang, T., and Kim, J. (2005). On ductile fracture initiation toughness: Effects of void volume fraction, void shape and void distribution. *International Journal of Solids and Structures*, 42.
- Gao, X., Zhang, G., and Roe, C. (2010). A study on the effect of the stress state on ductile fracture. *International Journal of Damage Mechanics*, 19.
- Garrison, W. M. and Moody, N. R. (1987). Ductile fracture. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 48.
- Garrison, W. M., Wokcieszynski, A. L., and Iorio, L. E. (1997). Effects of inclusion distributions on the fracture toughness of structural steels. *Recent Advances in Fracture*.
- Ghosh, S., Bai, J., and Paquet, D. (2009). Homogenization-based continuum plasticity-damage model for ductile failure of materials containing heterogeneities. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57.
- Ghosh, S., Lee, K., and Moorthy, S. (1995). Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and voronoi cell finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 32.
- Ghosh, S. and Paquet, D. (2013). Adaptive concurrent multi-level model for multi-scale analysis of ductile fracture in heterogeneous aluminum alloys. *Mechanics of Materials*, 65.

- Gitman, I., Askes, H., and Sluys, L. (2007). Representative volume: Existence and size determination. *Engineering Fracture Mechanics*, 74.
- Gologanu, M. (1997). *Etude de quelques problèmes de rupture ductile des métaux*. PhD thesis, Université Paris.
- Gologanu, M., Leblond, J.-B., and Devaux, J. (1993). Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids—case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41.
- Gologanu, M., Leblond, J.-B., and Devaux, J. (1994). Approximate models for ductile metals containing nonspherical voids—case of axisymmetric oblate ellipsoidal cavities. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 116.
- Gologanu, M., Leblond, J.-B., and Devaux, J. (1997). Recent extensions of gurson's model for porous ductile metals. In Suquet, P., editor, *Continuum micromechanics*, pages 61–130. Springer.
- Gologanu, M., Leblond, J.-B., and Devaux, J. (2001a). Theoretical models for void coalescence in porous ductile solids. ii. coalescence “in columns”. *International Journal of Solids and Structures*, 38.
- Gologanu, M., Leblond, J.-B., Perrin, G., and Devaux, J. (2001b). Theoretical models for void coalescence in porous ductile solids. i. coalescence “in layers”. *International Journal of Solids and Structures*, 38.
- Goods, S. H. and Brown, L. M. (1979). Overview no. 1: The nucleation of cavities by plastic deformation. *Acta Metallurgica*, 27.
- Guedes, J. M. and Kikuchi, N. (1990). Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 83.
- Gurland, J. and Plateau, J. (1963). The mechanism of ductile rupture of metals containing inclusions. (56).
- Gurson, A. L. (1975). *Plastic flow and fracture behaviour of ductile materials incorporating void nucleation, growth and interaction*. PhD thesis, Brown University.
- Gurson, A. L. (1977). Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part i—yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99.
- Gurtin, M. E. (1981). *An Introduction to Continuum Mechanics*. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, 1st edition.
- Hahn, G. T. and Rosenfield, A. R. (1975). Metallurgical factors affecting fracture toughness of aluminum alloys. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 6.
- Hancock, J. W. and Mackenzie, A. C. (1976). On the mechanisms of ductile failure in high-strength steels subjected to multi-axial stress-states. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 24.

- Hao, S., Liu, W. K., Moran, B., Vernerey, F., and Olson, G. B. (2004). Multi-scale constitutive model and computational framework for the design of ultra-high strength, high toughness steels. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193.
- Hashin, Z. (1983). Analysis of composite materials—a survey. *Journal of Applied Mechanics*, 50.
- Hill, R. (1948). A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings Mathematical Physical & Engineering Sciences*, 193.
- Hill, R. (1963). Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11.
- Hill, R. (1967). The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15.
- Holzapfel, G. A. (2000). *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. Wiley, 1st edition.
- Horstemeyer, M. F., Matalanis, M. M., Sieber, A., and Botos, M. L. (2000). Micromechanical finite element calculations of temperature and void configuration effects on void growth and coalescence. *International Journal of Plasticity*, 16.
- Hu, C. and Ghosh, S. (2008). Locally enhanced voronoi cell finite element model (levcfem) for simulating evolving fracture in ductile microstructures containing inclusions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 76.
- Johnson, G. R. and Cook, W. H. (1985). Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. *Engineering Fracture Mechanics*, 21.
- Kaisalam, M. and Castañeda, P. P. (1998). A general constitutive theory for linear and nonlinear particulate media with microstructure evolution. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46.
- Kanetake, N., Nomura, M., and Choh, T. (1995). Continuous observation of microstructural degradation during tensile loading of particle reinforced aluminium matrix composites. *Materials Science and Technology*, 11.
- Kanit, T., Forest, S., Galliet, I., Mounoury, V., and Jeulin, D. (2003). Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 40.
- Keralavarma, S. and Benzerga, A. (2010). A constitutive model for plastically anisotropic solids with non-spherical voids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 58.
- Keralavarma, S. M. and Benzerga, A. A. (2008). An approximate yield criterion for anisotropic porous media. *Comptes Rendus Mécanique*, 336.
- Keralavarma, S. M. and Chockalingam, S. (2016). A criterion for void coalescence in anisotropic ductile materials. *International Journal of Plasticity*.

- Khan, I. A. and Bhasin, V. (2016). On the role of secondary voids and their distribution in the mechanism of void growth and coalescence in porous plastic solids. *International Journal of Solids and Structures*.
- Kim, J., Gao, X., and Srivatsan, T. S. (2003). Modeling of crack growth in ductile solids: a three-dimensional analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 40.
- Kim, J., Gao, X., and Srivatsan, T. S. (2004). Modeling of void growth in ductile solids: effects of stress triaxiality and initial porosity. *Engineering Fracture Mechanics*, 71.
- Kim, J., Zhang, G., and Gao, X. (2007). Modeling of ductile fracture: Application of the mechanism-based concepts. *International Journal of Solids and Structures*, 44.
- Koplik, J. and Needleman, A. (1988). Void growth and coalescence in porous plastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 24.
- Kouznetsova, V. (2002). *Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven.
- Kouznetsova, V., Brekelmans, W. A. M., and Baaijens, F. P. T. (2001). An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials. *Computational Mechanics*, 27.
- Kouznetsova, V. G., Geers, M. G. D., and Brekelmans, W. A. M. (2004). Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials: a nested finite element solution strategy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193.
- Kubin, L. and Estrin, Y. (1985). The portevin-le chatelier effect in deformation with constant stress rate. *Acta Metallurgica*, 33.
- Leblond, J.-B. and Morin, L. (2014). Gurson's criterion and its derivation revisited. *Journal of Applied Mechanics*, 81.
- Leblond, J.-B. and Mottet, G. (2008). A theoretical approach of strain localization within thin planar bands in porous ductile materials. *Comptes Rendus Mécanique*, 336.
- Leblond, J.-B., Perrin, G., and Deveaux, J. (2014). An improved gurson-type model for hardenable ductile metals. *European Journal of Mechanics Series A Solids*, 14.
- Lee, B. J. and Mear, M. E. (1999). Stress concentration induced by an elastic spheroidal particle in a plastically deforming solid. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 47.
- Li, M., Ghosh, S., and Richmond, O. (1999). An experimental-computational approach to the investigation of damage evolution in discontinuously reinforced aluminum matrix composite. *Acta Materialia*, 47.
- Lopes, I. A. R. (2016). Computational strategies for the solution of coupled multi-scale problems. Technical report, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Mackenzie, A. C., Hancock, J. W., and Brown, D. K. (1977). On the influence of state of stress on ductile failure initiation in high strength steels. *Engineering Fracture Mechanics*, 9.

- Madou, K. and Leblond, J.-B. (2012a). A gurson-type criterion for porous ductile solids containing arbitrary ellipsoidal voids—i: Limit-analysis of some representative cell. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60.
- Madou, K. and Leblond, J.-B. (2012b). A gurson-type criterion for porous ductile solids containing arbitrary ellipsoidal voids—ii: Determination of yield criterion parameters. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60.
- Madou, K. and Leblond, J.-B. (2013a). Numerical studies of porous ductile materials containing arbitrary ellipsoidal voids—i: Yield surfaces of representative cells. *European Journal of Mechanics Series A Solids*, 42.
- Madou, K. and Leblond, J.-B. (2013b). Numerical studies of porous ductile materials containing arbitrary ellipsoidal voids—ii: Evolution of the length and orientation of the void axes. *European Journal of Mechanics Series A Solids*, 42.
- Maire, E.; Withers, P. J. (2014). Quantitative x-ray tomography. *International Materials Reviews*, 59.
- Malcher, L. (2012). *Continuum Modelling and Numerical Simulation of Damage for Ductile Materials*. PhD thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Malcher, L., Pires, F. M. A., and de Almeida César de Sá, J. M. (2011). An assessment of isotropic constitutive models for ductile fracture under high and low stress triaxiality. *International Journal of Plasticity*, (30):81–115.
- Mandel, J. (1964). Contribution théorique à l'étude de l'écoulement plastique. *11th international congress on applied mechanics*, pages 502–509.
- Marini, B., Mudry, F., and Pineau, A. (1985). Experimental study of cavity growth in ductile rupture. *Engineering Fracture Mechanics*, 22.
- McClintock, F. A. (1968). A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *Journal of Applied Mechanics*, 35.
- McClintock, F. A., Kaplan, S. M., and Berg, C. A. (1966). Ductile fracture by hole growth in shear bands. *International Journal of Fracture*, 2.
- McCormick, P. (1988). Theory of flow localisation due to dynamic strain ageing. *Acta Metallurgica*, 36.
- Mear, M. E. and Hutchinson, J. W. (1985). Influence of yield surface curvature on flow localization in dilatant plasticity. *Mechanics of Materials*, 4.
- Meyers, M. A. and Aimone, C. T. (1983). Dynamic fracture (spalling) of metals. *Progress in Materials Science*, 28.
- Michel, J. and Suquet, P. (1992). The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40.
- Miehe, C. (2002). Computational micro-to-macro transitions for discretized micro-structures of heterogeneous materials at finite strains based on the minimization of averaged incremental energy. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, (192):559–591.

- Miehe, C. (2003). Computational micro-to-macro transitions for discretized micro-structures of heterogeneous materials at finite strains based on the minimization of averaged incremental energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192.
- Miehe, C. and Koch, A. (2002). Computational micro-to-macro transitions of discretized microstructures undergoing small strains. *Archive of Applied Mechanics*, 72.
- Miehe, C., Schotte, J., and Schröder, J. (1999a). Computational micro-macro transitions and overall moduli in the analysis of polycrystals at large strains. *Computational Materials Science*, 16.
- Miehe, C., Schröder, J., and Schotte, J. (1999b). Computational homogenization analysis in finite plasticity. simulation of texture development in polycrystalline materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 171.
- Monchiet, V., Cazacu, O., Charkaluk, E., and Kondo, D. (2008). Macroscopic yield criteria for plastic anisotropic materials containing spheroidal voids. *International Journal of Plasticity*, 24.
- Monchiet, V., Gruescu, C., Charkaluk, E., and Kondo, D. (2006). Approximate yield criteria for anisotropic metals with prolate or oblate voids. *Comptes Rendus Mécanique*, 334.
- Morin, L., Leblond, J.-B., and Benzerga, A. A. (2015a). Coalescence of voids by internal necking: Theoretical estimates and numerical results. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 75.
- Morin, L., Leblond, J.-B., Benzerga, A. A., and Kondo, D. (2016). A unified criterion for the growth and coalescence of microvoids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*.
- Morin, L., Leblond, J.-B., and Kondo, D. (2015b). A gurson-type criterion for plastically anisotropic solids containing arbitrary ellipsoidal voids. *International Journal of Solids and Structures*, 77.
- Morin, L., Madou, K., Leblond, J.-B., and Kondo, D. (2014). A new technique for finite element limit-analysis of hill materials, with an application to the assessment of criteria for anisotropic plastic porous solids. *International Journal of Engineering Science*, 74.
- Nahshon, K. and Hutchinson, J. W. (2008). Modification of the gurson model for shear failure. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 27.
- Needleman, A. (1972a). A numerical study of necking in circular cylindrical bar. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 20.
- Needleman, A. (1972b). Void growth in an elastic-plastic medium. *Journal of Applied Mechanics*, 39.
- Needleman, A. (1987). A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *Journal of Applied Mechanics*, 54.
- Needleman, A. and Rice, J. R. (1978). Limits to ductility set by plasticity flow localization. In Koistinen D. P., N. M. W., editor, *Mechanics of sheet metal forming*, pages 237–267. Plenum Press.

- Needleman, A. and Tvergaard, V. (1987). An analysis of ductile rupture modes at a crack tip. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 35.
- Nemat-Nasser, S. and Hori, M. (1993). *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics 37. Academic Press, Elsevier.
- Nielsen, K. L., Dahl, J., and Tvergaard, V. (2012). Collapse and coalescence of spherical voids subject to intense shearing: studied in full 3d. *International Journal of Fracture*, 177.
- Oñate, E. (2010). *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 1: Basis and Solids*. Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences. Springer Netherlands.
- Owen, D. R. J. and Hinton, E. (1986). *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*. Pineridge Press.
- Pardoen, T. (1998). *Ductile Fracture of Cold-drawn Copper Bars: Experimental Investigation and Micromechanical Modeling*. PhD thesis, Université Catholique de Louvain.
- Pardoen, T. and Delannay, F. (1998). Assessment of void growth models from porosity measurements in cold-drawn copper bars. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 29.
- Pardoen, T. and Hutchinson, J. W. (2000). An extended model for void growth and coalescence. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48.
- Perrin, G. (1992). *Contribution à l'étude théorique et numérique de la rupture ductile des métaux*. PhD thesis, Ecole Polytechnique.
- Pineau, A., Benzerga, A. A., and Pardoen, T. (2016). Failure of metals i – brittle and ductile fracture. *Acta Materialia*.
- Plateau, J., Henry, G., and Crussard, C. (1957). Quelques nouvelles applications de la microfractographie. *Rev. Métallurgie*, 54.
- Puttick, K. E. (1959). Ductile fracture in metals. *Philosophical Magazine*, 4.
- Quek, S. S. and Liu, G. (2003). *Finite Element Method: A Practical Course*. Elsevier Science.
- Reis, F. J. P. (2014). *Multi-Scale Modelling and Analysis of Heterogeneous Solids at Finite Strains*. PhD thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Rice, J. R. and Tracey, D. M. (1969). On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17.
- Rogers, H. C. (1960). Tensile fracture of ductile metals. 218.
- Rousselier, G. (1981). Finite deformation constitutive relations including ductile fracture damage. In Nemat-Nasser, S., editor, *Three-dimensional constitutive equations of damage and fracture*, pages 331–355. Pergamon Press.

- Rousselier, G. (1987). Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture. *Nuclear Engineering and Design*, 105.
- Roy, G. L., Embury, J. D., Edwards, G., and Ashby, M. F. (1981). A model of ductile fracture based on the nucleation and growth of voids. *Acta Metallurgica*, 29.
- Rudnicki, J. W. and Rice, J. R. (1975). Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23.
- Scheyvaerts, F., Onck, P. R., Tekoglu, C., and Pardoën, T. (2011). The growth and coalescence of ellipsoidal voids in plane strain under combined shear and tension. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59.
- Seidenfuss, M., Samal, M., and Roos, E. (2011). On critical assessment of the use of local and nonlocal damage models for prediction of ductile crack growth and crack path in various loading and boundary conditions. *International Journal of Solids and Structures*, 48.
- Siruguet, K. and Leblond, J.-B. (2004). Effect of void locking by inclusions upon the plastic behavior of porous ductile solids—i: theoretical modeling and numerical study of void growth. *International Journal of Plasticity*, 20.
- Smit, R. J. M., Brekelmans, W. A. M., and Meijer, H. E. H. (1998). Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155.
- Stone, R. H. V., Cox, T. B., Low, J. R., and Psioda, J. A. (1985). Microstructural aspects of fracture by dimpled rupture. *International Metals Reviews*, 30.
- Tekoglu, C. (2015). Void coalescence in ductile solids containing two populations of voids. *Engineering Fracture Mechanics*.
- Tekoglu, C., Hutchinson, J. W., and Pardoën, T. (2015). On localization and void coalescence as a precursor to ductile fracture. *Philosophical Transactions Mathematical Physical & Engineering Sciences*, 373.
- Tekoglu, C., Leblond, J. B., and Pardoën, T. (2012). A criterion for the onset of void coalescence under combined tension and shear. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60.
- Teng, X. (2008). Numerical prediction of slant fracture with continuum damage mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, (75):2020–2041.
- Terada, K., Hori, M., Kyoya, T., and Kikuchi, N. (2000). Simulation of the multi-scale convergence in computational homogenization approaches. *International Journal of Solids and Structures*, 37.
- Thomason, P. F. (1985). Three-dimensional models for the plastic limit-loads at incipient failure of the intervoid matrix in ductile porous solids. *Acta Metallurgica*, 33.
- Tian, R., Chan, S., Tang, S., Kopacz, A. M., Wang, J.-S., Jou, H.-J., Siad, L., Lindgren, L.-E., Olson, G. B., and Liu, W. K. (2010). A multiresolution continuum simulation of the ductile fracture process. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 58.

- Tipper, C. F. (1949). The fracture of metals. *Metallurgia*, 39.
- Torki, M. E., Benzerga, A. A., and Leblond, J. B. (2015). On void coalescence under combined tension and shear. *Journal of Applied Mechanics*, 82.
- Tvergaard, V. (1981). Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. *International Journal of Fracture*, 17.
- Tvergaard, V. (1982). On localization in ductile materials containing spherical voids. *International Journal of Fracture*, 18.
- Tvergaard, V. (1987). Effect of yield surface curvature and void nucleation on plastic flow localization. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 35.
- Tvergaard, V. (1990). Material failure by void growth to coalescence. *Advanced in Applied Mechanics*, 27.
- Tvergaard, V. (1996). Effect of void size difference on growth and cavitation instabilities. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44.
- Tvergaard, V. (1998). Interaction of very small voids with larger voids. *International Journal of Solids and Structures*, 35.
- Tvergaard, V. (2008). Shear deformation of voids with contact modelled by internal pressure. *International Journal of Mechanical Sciences*, 50.
- Tvergaard, V. (2009). Behaviour of voids in a shear field. *International Journal of Fracture*, 158.
- Tvergaard, V. (2012). Effect of stress-state and spacing on voids in a shear-field. *International Journal of Solids and Structures*, 49.
- Tvergaard, V. and Hutchinson, J. W. (2002). Two mechanisms of ductile fracture: void by void growth versus multiple void interaction. *International Journal of Solids and Structures*, 39.
- Tvergaard, V. and Needleman, A. (1984). Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica*, 32.
- Vaz, M., de Souza Neto, E. A., and Munoz-Rojas, P. A. (2011). *Advanced Computational Materials Modeling: From Classical to Multi-Scale Techniques*. Wiley.
- Vernerey, F. J., Liu, W. K., Moran, B., and Olson, G. (2008). A micromorphic model for the multiple scale failure of heterogeneous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56.
- Weck, A. and Wilkinson, D. S. (2008). Experimental investigation of void coalescence in metallic sheets containing laser drilled holes. *Acta Materialia*, 56.
- Weck, A., Wilkinson, D. S., Maire, E., and Toda, H. (2008). Visualization by x-ray tomography of void growth and coalescence leading to fracture in model materials. *Acta Materialia*, 56.

- Wierzbicki, T. and Xue, L. (2005). On the effect of the third invariant of the stress deviator on ductile fracture. Technical report, Impact and Crashworthiness Laboratory, Massachusetts Institute of Technology.
- Willis, J. R. (1991). On methods for bounding the overall properties of nonlinear composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39.
- Xia, L., Shih, C. F., and Hutchinson, J. W. (1995). A computational approach to ductile crack growth under large scale yielding conditions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43.
- Yamamoto, H. (1978). Conditions for shear localization in the ductile fracture of void-containing materials. *International Journal of Fracture*, 14.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., and Fox, D. (2014). *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Butterworth-Heinemann, 7th edition.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., and Zhu, J. Z. (2013). *The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 7th edition.